

# SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-LINÉAIRES EN RÉGIME AUTONOME. RECHERCHE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES PAR UNE MÉTHODE BALISTO-STROBOSCOPIQUE. APPLICATION A L'ÉQUATION DE VAN DER POL

L. SIDERIADES

Département d'Automatique et Dynamique non-linéaire, Faculté des Sciences et Techniques (U3),  
Centre de St Jérôme, Marseille, France

(Received 3 September 1974)

**Résumé** — Etant donné un système continu  $\dot{x} = X(x, y)$ ,  $\dot{y} = Y(x, y)$  dont le portrait topologique des courbes intégrales est caractérisé par au moins un point singulier asymptotiquement instable, entouré d'un cycle limite stable, dans un domaine donné, on détermine la situation du cycle limite par une méthode appelée balisto-stroboscopique. A partir d'un système discret associé au modèle continu, on définit d'une part un cycle de conditions initiales approprié servant de plateforme pour un tir dont les diverses étapes sont réglées à l'aide d'une période d'échantillonnage convenablement choisie; à chaque période, le cycle initial se déforme par stroboscopique et converge vers le cycle limite de la solution périodique. Une application numérique détaillée est donnée pour un modèle de Van der Pol dans le cas  $\varepsilon = 1$ ; on examine aussi les cas  $\varepsilon = 0,1$  et  $\varepsilon = 10$ .

## A. ETUDE DU CAS GENERAL

### 1. Idées générales

Soit le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) = xF(x, y) + y \\ \dot{y} = Y(x, y) = -x + yG(x, y) \end{cases}$$

ou encore

$$\dot{x} = Ax \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} F & 1 \\ -1 & G \end{pmatrix} \quad (1)$$

$X, Y$  sont des fonctions holomorphes de leurs arguments, et le portrait topologique des courbes intégrales de (1) est constitué par au moins un point singulier asymptotiquement instable (foyer en général pour les cas faiblement et moyennement non-linéaires, noeud pour les cas fortement non-linéaires) entouré d'un cycle limite stable (C); ce qui est le cas par exemple pour l'équation de van der Pol. Trois graphes de base sont intéressants pour un tel système:

- les deux isoclines  $X = Y = 0$ , qui indiquent le "degré de non-linéarité" du système
- le lieu géométrique ( $\Gamma$ ) des points d'inflexion des courbes intégrales, soit

$$\Gamma(x, y) \doteq X^2 Y'_x - (X'_x - Y'_y)XY - Y^2 X'_y = 0$$

qui renseigne sur la non-linéarité du cycle limite; si ( $\Gamma$ ) est situé près du point singulier, il coupe le cycle limite qui présente alors des points d'inflexion (on a alors affaire à un cas moyennement ou fortement non-linéaire); si ( $\Gamma$ ) est situé loin du point singulier, il ne coupe pas le cycle limite qui correspond à un cas faiblement non-linéaire.

On associe ensuite au modèle continu (1) un système discret (2) défini avec une certaine période d'échantillonnage  $T$ , soit:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + TX(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + TY(x_n, y_n) \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad x_{n+1} = Bx_n \quad (2)$$

avec

$$B = 1 + AT = \begin{pmatrix} 1 + TF & T \\ -T & 1 + TG \end{pmatrix}$$

La connaissance de  $B$  permet d'écrire l'équation analytique *des antécédents* d'un cycle donné, alors que paradoxalement en apparence, la transformation  $B$  permet de déterminer le conséquent d'un point donné.

Dans certaines conditions d'une manière exacte, et dans tous les cas d'une manière approchée, on peut définir la transformation inverse de  $B$ , telle que:

$$x_n = B^{-1}x_{n+1} \text{ si } B^{-1} \text{ est la matrice inverse exacte}$$

$$x_n = B^{*-1}x_{n+1} \text{ si } B^{*-1} \text{ est la matrice inverse approchée}$$

La connaissance de cette matrice inverse permet d'écrire l'équation analytique *des conséquents* d'un cycle donné, et par suite l'équation approchée du cycle limite lui-même.

L'idée générale de l'étude est la suivante: les courbes intégrales (spirales dans le cas d'un foyer) divergentes autour du point singulier se rapprochent du graphe ( $\Gamma$ ) et peuvent même le couper, et alors le "décrément" de leurs oscillations décroît rapidement pour s'annuler sur le cycle limite. S'il y a intersection, ou échancrure du cycle par ( $\Gamma$ ), on est dans un cas moyennement (pour une faible échancrure) ou fortement non-linéaire; s'il n'y a pas d'intersection, on est dans un cas faiblement non-linéaire. De sorte que la "distance" entre le cycle limite et ( $\Gamma$ ) indique approximativement le "degré de non-linéarité" du système. Si on envisage de considérer ce cycle limite ( $C$ ) comme la situation asymptotique d'un cycle  $C_i$  (intérieur en général au précédent), déformable par stroboscopie, le problème qui se pose est:

- d'une part, de définir un cycle de conditions initiales  $C_0$  (cycle de départ)
- d'autre part de régler le choix des périodes d'échantillonnage  $T_i$  déterminant les  $C_i$  de manière à converger rapidement vers  $C$ .

## 2. Choix du cycle des conditions initiales ( $C_0$ )

Tout d'abord, étant donné qu'il faut plusieurs étapes pour converger sur ( $C$ ) avec une approximation donnée, le cycle ( $C_0$ ) sera le plus simple possible, circulaire ou mieux elliptique.

Ou pourrait prendre le cercle tangent intérieurement à  $dV/dt = 0$  comme l'indique la méthode directe de Liapounoff (avec  $V = x^2 + y^2$ ). Mais cela n'est pas intéressant car le conséquent  $C_1$  de  $C_0$  est un cycle sans contact avec  $C_0$ , et il vaut mieux choisir tout de suite  $C_1$ . On pourrait aussi utiliser le cycle correspondant à la solution du premier harmonique qui a l'avantage de couper l'axe des  $x$  en un point voisin de celui du cycle cherché. On peut enfin utiliser le cercle tangent à ( $\Gamma$ ), ou, pour éviter des calculs laborieux, un cercle, voisin du précédent, passant par un point remarquable et simple de ( $\Gamma$ ).

Il est à remarquer ici que si on fait varier de 0 à  $+\infty$  le paramètre de non-linéarité du système, soit  $\varepsilon$ , le choix de  $C_0$  sera la suivant:

- si  $\varepsilon$  est très faible,  $C_0$  sera le cercle de la méthode du premier harmonique
- si  $\varepsilon$  est faible (cycle  $C$  sans points d'inflexion), on peut conserver la définition précédente
- si  $\varepsilon$  est moyen (apparition de points d'inflexion), alors on prendra  $C_0$  tangent à ( $\Gamma$ )
- si  $\varepsilon$  est grand, (très forte non-linéarité), alors  $C_0$  sera à la limite le cercle (le plus petit) de la méthode directe de Liapounoff.

Mais il vaut mieux utiliser, pour une question de précision, l'ellipse définie par la théorie des fonctions définies-positives à partir du système (1) linéarisé. Si  $\bar{A}$  est ce dernier système, avec

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$V(x, y) = (ad - bc + c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (ad - bc + a^2 + b^2)y^2$$

Le choix des ellipses  $C_0$  sera guidé par les mêmes idées que pour les cercles précédents. On peut montrer, suivant les exemples, que le cycle ( $C$ ) est inclus dans un domaine en forme de couronne, défini par

$$V(x, y) = k \quad \text{et} \quad V(x, y) = nk$$

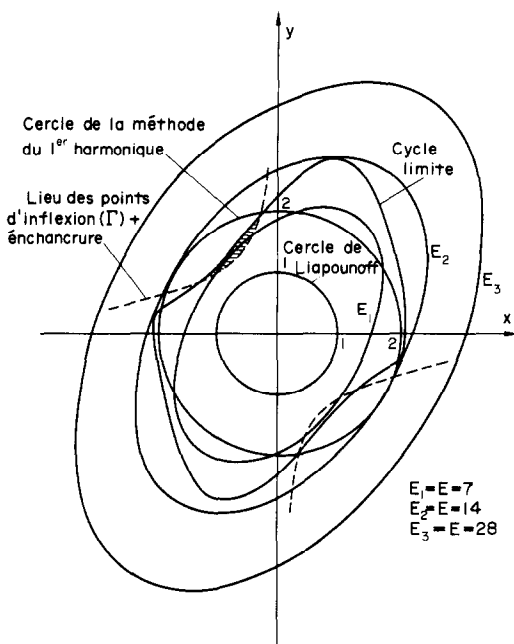


Fig. 1

- si  $\varepsilon$  est faible:  $k$  est voisin de la valeur du cercle du 1er harmonique
- si  $\varepsilon$  est moyen: on prendra une valeur correspondant à la tangence avec  $(\Gamma)$
- si  $\varepsilon$  est fort:  $k$  est voisin de la valeur du cercle de Liapounoff
- $n$  est un entier faible (égal à 2 p. ex. pour un modèle de Van der Pol).

Sur la Fig. 1, on peut voir que le cycle limite, pour  $\varepsilon = 1$ , est inclus dans une couronne elliptique définie par:

$$E \rightarrow V(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 = k \quad \text{avec} \quad k = 7 \quad \text{et} \quad n = 2$$

Pou  $k = 7$ , on prend la tangence avec  $(\Gamma)$  où  $V(-1, 1) = 7$ . On remarque également que le cycle  $(C)$  échancre légèrement  $(\Gamma)$ .

### 3. Choix de la période d'échantillonnage $T$

Une période de référence est évidemment constituée par la période  $T_0$  du premier harmonique. Théoriquement, il suffira de choisir  $T$  de manière à ce que le théorème de Shannon soit largement satisfait, c'est-à-dire que si  $T_0$  correspond à  $2\pi$ ,  $T/T_0$  doit correspondre à un petit angle. Donc  $T/T_0$  sera de l'ordre de  $1/10$ . Mais, il faut prendre garde ici à l'existence d'une "courbe frontière"  $\Delta(x, y) = 0$  définie par le dénominateur de  $B^{-1}$  (ou de  $B^{*-1}$ ): la valeur de  $T$  doit être choisie de telle manière que tout cycle  $C_i$  et à fortiori le cycle  $C$ , soient inclus d'un seul tenant dans le domaine défini par  $\Delta$ . Cette courbe frontière apparait donc ici comme ayant des propriétés strictement opposées à celle du critère négatif de Bendixson, soit:  $\text{trace}(A) = 0$  qui doit couper  $C$ , lorsqu'il existe.

Dans le choix de  $B^{*-1}$ , on s'efforcera en particulier de montrer que  $\Delta$  est homéomorphe à  $D(x, y) = 0$ , où  $D = \text{Dét}(1 + AT) = 0$ .

La Fig. 2 montre ainsi la situation d'un cycle de Van der Pol par rapport

- au graphe du critère de Bendixson
- aux graphes  $D$  et  $\Delta$ .

Si  $T$  est la période ainsi choisie, on peut alors atteindre le cycle limite par un "tir" en 3 ou 4 coups à partir de  $C_0$  avec des valeurs dégressives de  $T$  de manière à conserver le plus de précision. Par exemple, on pourra prendre:

- $T$  pour le 1er saut ( $C_0 \rightarrow C_1$ )
- $T/3$  pour le 2ème saut ( $C_1 \rightarrow C_2$ )
- $T/10$  pour le 3ème saut ( $C_2 \rightarrow C_3$ ), etc.

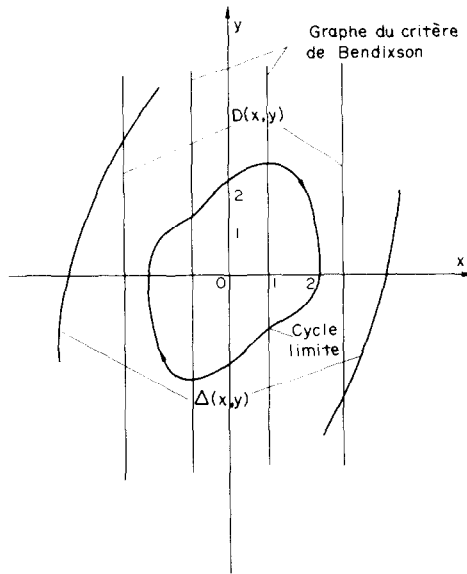


Fig. 2

Les divers  $C_i$  tendent plus ou moins asymptotiquement (avec des intersections inévitables suivant le réglage des  $T_i$ ) vers le cycle limite, car ce dernier est toujours enveloppé extérieurement par les divers cycles limites de (2).

4. Equation approchée du cycle limite

Partant de  $C_0$  défini par:

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = k$$

on peut écrire la figure stroboscopique d'un cycle  $C_i$  ( $i$  correspondant à l'indice  $n$  d'échantillonnage à partir de 0) avec l'équation suivante:

$$\alpha x_n^2 + 2\beta x_n y_n + \gamma y_n^2 = k \tag{3}$$

avec

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = B_n^{-1} [B_{n-1}^{-1}] \dots [B_1^{-1}(x, y)]$$

où chaque  $B_i$  correspond à une période  $T_i$ . Plus  $n$  est élevé, et plus l'équation (3) tend vers l'équation du cycle limite (C).

B. ETUDE DE L'EQUATION DE VAN DER POL

1. Idées générales

Soit l'équation de Van der Pol en régime autonome:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Nous choisirons pour cette étude le cas  $\varepsilon = 1$  qui correspond à une non-linéarité moyenne (voire même assez forte), et nous envisagerons assez rapidement à la fin un cas faiblement non-linéaire avec  $\varepsilon = 0, 1$  et un cas fortement non-linéaire avec  $\varepsilon = 10$ . On obtient pour la forme canonique du système dans le plan de phase:

$$\begin{cases} \dot{x} = X = y \\ \dot{y} = Y = -x + y(1 - x^2) \end{cases}$$

et pour le lieu des points d'inflexion:

$$\Gamma(x, y) = xy(x^2 + 2y^2) + x^2 - xy + y^2 = 0$$

D'après les résultats de la première partie, on peut définir :

—la matrice des conséquents, soit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & +T \\ -T & 1 + T(1 - x^2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

—la matrice approchée des antécédents. Commençons par envisager le système linéarisé :

avec  $\dot{x} = \bar{A}x \rightarrow \bar{x}_{n+1} = \bar{B}\bar{x}_n$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{B} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 1+T & -T \\ +T & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

avec  $D = 1 + T + T^2$

Si on pose alors,

$$\begin{cases} x_n = \bar{x}_n + \Delta(\bar{x}_n) \\ y_n = \bar{y}_n + \Delta(\bar{y}_n) \end{cases}$$

il est facile de montrer que :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-T^2 \bar{x}_n^2}{\Delta} \\ \frac{T \bar{x}_n \bar{y}_n}{\Delta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_n \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

avec

$$\Delta = 1 + T(1 - \bar{x}_n^2) + T^2(1 + 2\bar{x}_n \bar{y}_n)$$

D'où l'expression de la matrice approchée inverse qui permet d'obtenir les antécédents :

$$B^{*-1} = \frac{1}{D\Delta} \begin{pmatrix} LT + \Delta(1 + T) & L - T\Delta \\ \Delta T + M(1 + T) & \Delta - MT \end{pmatrix} \quad (7)$$

Cette matrice constitue une approximation au 1er ordre près, en supposant que  $\Delta(\bar{x}_n)$  et  $\Delta(\bar{y}_n)$  sont des quantités faibles devant  $\bar{x}_n$  et  $\bar{y}_n$ ; cela est d'autant plus vrai que  $\varepsilon$  et  $T$  sont plus faibles. Les valeurs de  $L$  et  $M$  sont les suivantes :

$$L = -T^2 \bar{x}_n^2 \quad M = T \bar{x}_n \bar{y}_n$$

On peut également, par des procédés géométriques, trouver d'autres expressions pour la matrice inverse. Par exemple, on vérifiera que les expressions ci-après donnent de bons résultats :

$$B^{*-1} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} F & T(T-F) \\ T(1+T)^{-1}G & G-T \end{bmatrix} \quad (8)$$

avec

$$\begin{cases} F = 1 + T - Tx^2 + 3T^2y(x - Ty) \\ G = 1 + T + T^2y(2x - 3Ty) \\ \Delta' = 1 + T - T(x - 2Ty)^2 \end{cases}$$

La courbe frontière  $\Delta(x, y) = 0$  diffère peu (à une distorsion non-linéaire près) du déterminant de la matrice  $B$ , soit :

$$1 + T(1 - x^2) + T^2 = 0$$

et ne doit pas couper le cycle limite. Alors que pour le critère de Bendixson, on avait une courbe définie par deux droites parallèles à l'axe des  $y$  en  $x = \pm 1$  et le cycle limite, coupe effectivement ces droites. Ces conditions sont satisfaites sur le graphique de la figure 2 où le choix de  $T$  est voisin de 0,1. Par suite, toutes les valeurs de  $T < 0,1$  sont de bonnes valeurs pour l'utilisation de  $B^{*-1}$ .

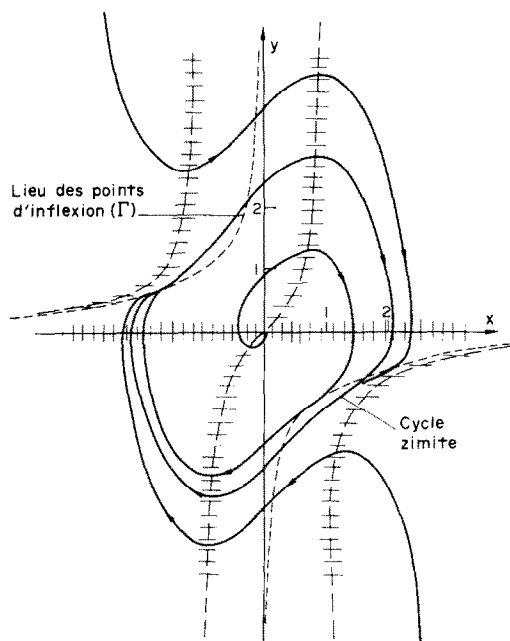


Fig. 3

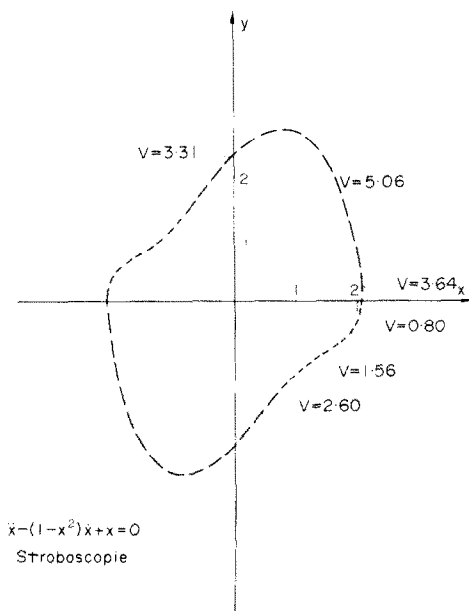


Fig. 4

2. Choix des cycles  $C_0$  et des périodes  $T$ —Illustrations

Tout d'abord en ce qui concerne le système continu, la Fig. 3 représente les courbes intégrales, tracées par la méthode des isoclines, avec le cycle limite; la Fig. 4 représente ce même cycle stroboscopé de manière à donner une idée de la vitesse d'un mobile qui s'y déplace, et par suite de la non-linéarité. On pourra se servir de ce cycle pour le comparer aux divers cycles approchés des figures suivantes.

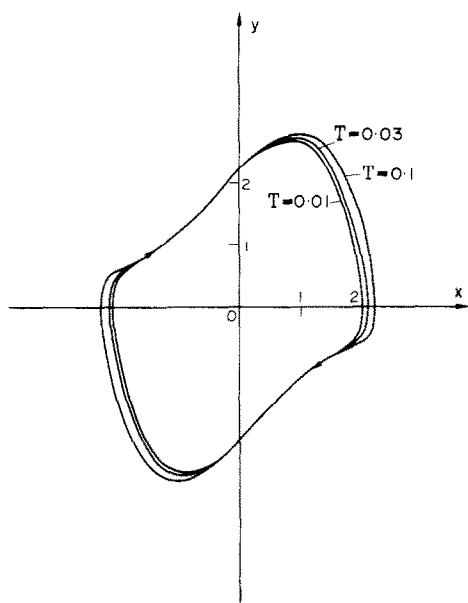


Fig. 5

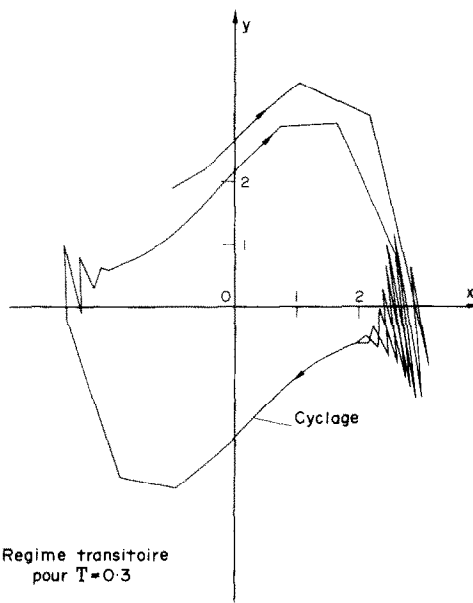


Fig. 6

En ce qui concerne le système discret associé, on peut voir sur la Fig. 5 que le cycle limite correspondant à  $T = 0,01$  est pratiquement confondu (à l'épaisseur du trait près) avec le cycle du système continu. Le choix de  $T = 0,1$ , préconisé dans le précédent paragraphe, constitue une limite supérieure, mais le cycle correspondant constitue une assez bonne approximation, car on y tend asymptotiquement par son intérieur. Par contre pour  $T = 0,6$  (cf. fig. 6), ce qui correspond au  $1/10$  de la période  $T_0$ , le système échantillonné associé présente un cycle avec des rebondissements propres à un col de type 3 dans le voisinage de  $(\Gamma)$ .

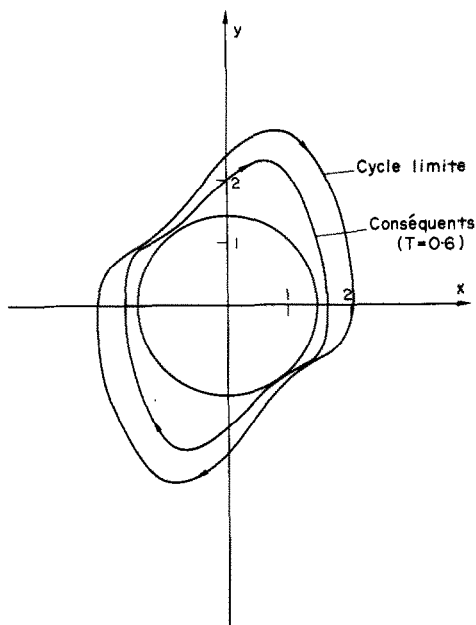


Fig. 7

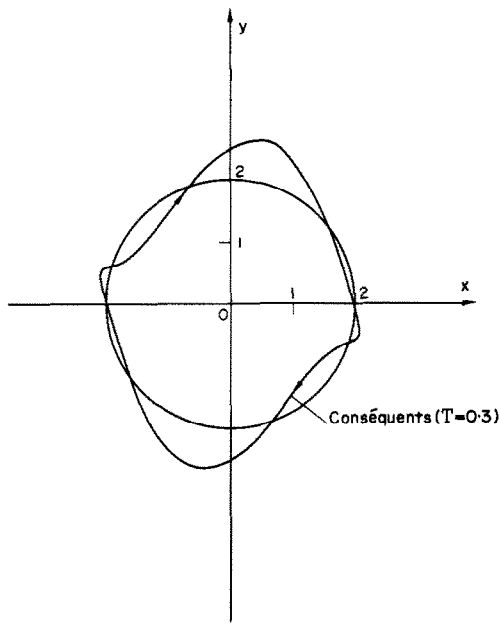


Fig. 8

Au lieu d'utiliser le cercle unitaire de la méthode de Liapounoff qui donne un cycle sans contact, la Fig. 7 représente le lieu des conséquents à partir du cercle passant par le point  $(-1,1)$  de  $(\Gamma)$  pour  $T = 0,6$  et qui est aussi un cycle sans contact avec  $C$  (on peut se permettre un tel choix de  $T$ , car le cercle est situé loin de  $C$ ).

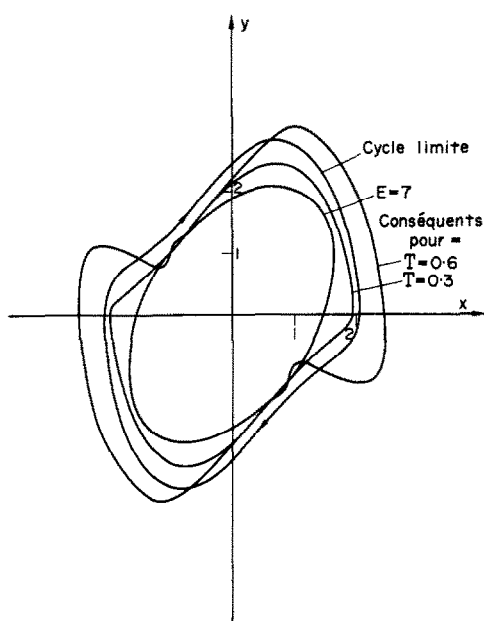


Fig. 9

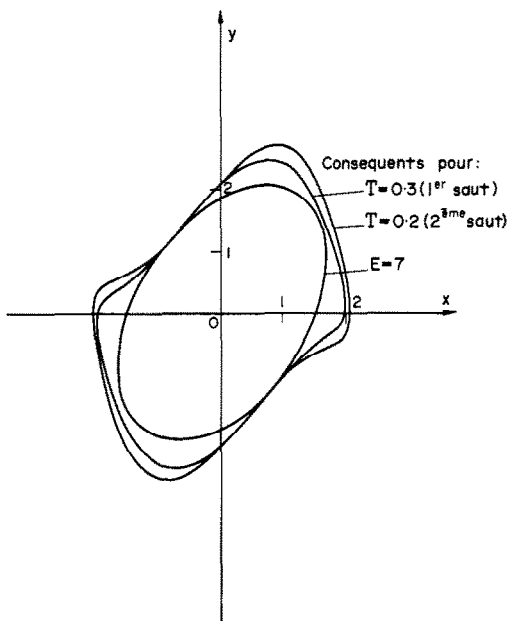


Fig. 10

La Fig. 8 représente le lieu des conséquents à partir du cercle de la méthode du 1er harmonique pour  $T = 0,3$ ; on remarque que le cycle correspondant est assez éloigné du cycle  $C$ . Ainsi d'une manière générale, pour ce cas  $\varepsilon = 1$  les cercles utilisés comme cycles  $C_0$  ne donnent que des résultats moyens.

Par contre les ellipses donnent de bien meilleurs résultats.

La Fig. 9 représente les conséquents de  $E = 3x^2 - 2xy + 2y^2 = k$  avec  $k = 7$  qui échancre légèrement ( $\Gamma$ ) et qui passe par  $(-1, 1)$ , pour  $T = 0,3$  et pour  $T = 0,6$ ; à cause de la forte valeur de  $T$ , ce dernier cycle présente un rebondissement autour du cycle  $C$ , alors que pour  $T = 0,3$  le cycle  $C_1$  constitue une bonne approche.

On a représenté sur les Figs. 10 à 13 divers cycles  $C_1$ —et parfois  $C_2$ —pour des valeurs croissantes de  $k$ , de 7 à 10, pour  $T = 0,2$  et  $0,3$ . On remarque que sur la Fig. 10, le lieu des conséquents  $C_2$  pour  $T = 0,2$  constitue une très bonne approximation pour le cycle  $C$ . Cette approximation peut être sensiblement améliorée en traçant  $C_3$  pour  $T = 0,05$  et  $C_4$  pour  $T = 0,01$ : la figure correspondante n'est pas reproduite ici à cause de son manque de lisibilité.

### 3. Equation approchée du cycle limite ( $C$ )

Il suffit ici d'appliquer les résultats de la première partie. Si on effectue par exemple un tir en trois sauts de périodes respectives  $T_1 = 0,3$ ,  $T_2 = 0,1$  et  $T_3 = 0,3$  à partir de  $E(x, y) = 7$ , on aura :

$$3x_3^2 - 2x_3y_3 + 2y_3^2 = 7$$

avec

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = B_3^{*-1} [B_2^{*-1} [B_1^{*-1}(x, y)]]$$

(chaque  $B_i$  correspond à une période  $T_i$ )

Si on désire déterminer le point d'intersection avec l'axe des  $x$ , on peut l'encadrer progressivement entre des valeurs majorantes et minorantes. On obtient une valeur minorante en prenant le cycle conséquent de  $E = 7$  avec  $T = 0,3$ ; le calcul montre que  $x = 2,004$  à quelques millièmes près. Au contraire, on obtient une valeur majorante en prenant le cycle conséquent de l'ellipse  $E = 12,04$  passant par ce point avec  $T = 0,1$ ; le calcul montre que  $x = 2,098$ . Les résultats précédents utilisent les transformations (6) ou (7).

On peut aussi procéder d'une autre manière, en sens inverse, dans le cas de faibles périodes, c'est-à-dire :

—choisir un point approximatif du cycle limite (déterminé au préalable par la méthode

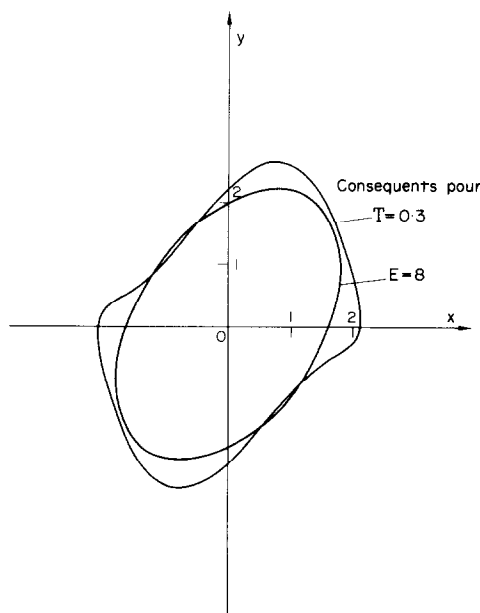


Fig. 11

des isoclines ou par un petit ordinateur), par exemple un "point de confluence" des courbes intégrales tel que  $A_0(-1,18, 1)$  ou  $A'_0(-1,19, 1)$  ou  $A''_0(-1,20, 1)$ .

—calculer son deuxième antécédent, à l'aide de la transformation (8) p. ex., dans l'hypothèse  $T = 0,1$ . On trouve successivement  $A_{-2}(-1,387, 0,871)$ ,  $A'_{-2}(-1,40, 0,90)$  et  $A''_{-2}(-1,41, 0,906)$ . D'où l'équation approchée du cycle limite passant par  $A_0$ ,  $A'_0$  ou  $A''_0$ , sachant que l'ellipse  $C_0$  passant par  $A_{-2}$  correspond à une certaine valeur de  $k$  égale ici respectivement à  $k = 9,701$ ,  $k' = 10,03$  et  $k'' = 10,16$ :

$$3x_2^2 - 2x_2y_2 + 2y_2^2 = k \text{ ou } k' \text{ ou } k''$$

avec

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = B^{*-1} [B^{*-1}(x, y)] \text{ pour } T = 0,1$$

soit encore:

$$\begin{cases} \Delta_i x_{i+1} = 1,1x_i - 0,1y_i + (x_i - 0,1y_i)(-0,1x_i^2 + 0,03y_i(x_i - 0,1y_i)) \\ \Delta_i y_{i+1} = 0,1x_i + y_i + y_i(2x_i - 0,3y_i)(0,009x_i + 0,01y_i) \end{cases}$$

et

$$\Delta_i = 1,1 - 0,1(x_i - 0,2y_i)^2$$

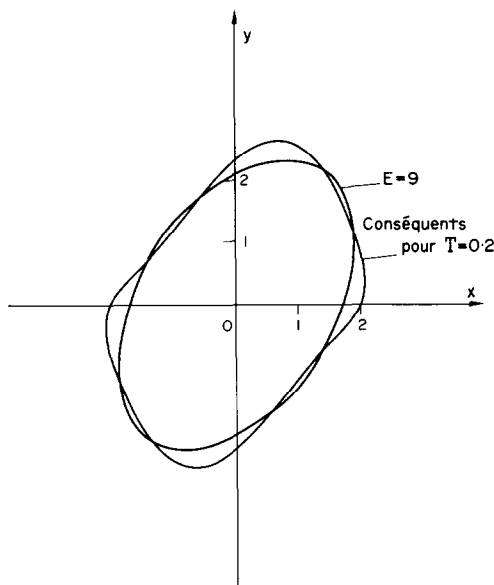


Fig. 12

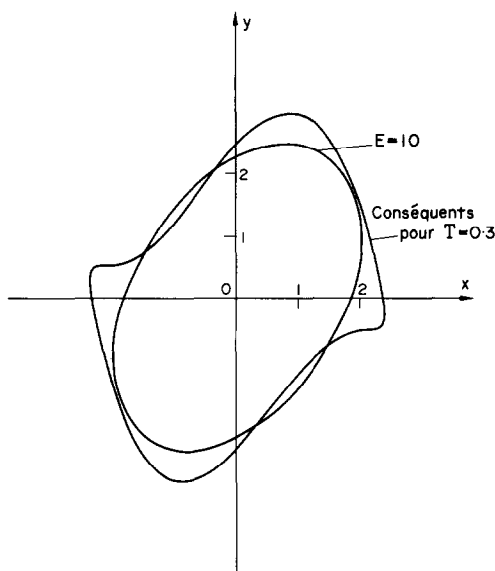


Fig. 13

On trouve en particulier, à quelques millièmes près, pour le point d'intersection avec l'axe des  $x$ , les valeurs suivantes:

$$k \rightarrow x = 1,992$$

$$k' \rightarrow x' = 2,031$$

$$k'' \rightarrow x'' = 2,049$$

Il semble donc que la valeur de ce point d'intersection soit:

$$2,02 < x < 2,05$$

On remarque donc ici que la méthode proposée est plus précise que celles d'Ajzerman[1], de Krasovski[2] ou de Schultz et Gibson[3]. P. ex. la méthode d'Ajzerman, utilisant une fonction de Liapounoff telle que:

$$V(x, y) = 2 + (1 - x^2)x^2 - 2(1 - x^2)xy + 2y^2 = k$$

conduit à un cycle  $C$  coupant l'axe des  $x$  en une valeur égale à 2,16.

4. *Etude succincte du cas  $\epsilon = 0,1$*

L'équation de  $C_0$  à utiliser ici est:

$$x^2 - 0,1xy + y^2 = k$$

avec une valeur de  $k$  voisine de 4; on remarquera que cette ellipse est pratiquement confondue avec le cercle de la méthode du 1<sup>er</sup> harmonique. On vérifie que le cycle est enfermé dans la couronne constituée par les deux ellipses précédentes correspondant à  $k_1 = 3,5$  et  $k_2 = 7$ .

La loi des conséquents est:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & T \\ -T & 1 + 0,1(1-x^2)T \end{pmatrix}$$

et la loi approchée des antécédents:

$$B^{*-1} = \frac{1}{D\Delta} \begin{bmatrix} \Delta & L \\ M & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 0,1T & -T \\ +T & 1 \end{bmatrix}$$

avec

$$L = -0,1T^2\bar{x}_n^2 \quad M = 0,1T\bar{x}_n\bar{y}_n$$

et

$$\Delta = 1 + 0,1T(1 - \bar{x}_n^2) + T^2(1 + 0,2\bar{x}_n\bar{y}_n)$$

où  $\bar{x}_n$  et  $\bar{y}_n$  sont les antécédents dans l'hypothèse linéaire. A partir de l'ellipse  $k = 4$ , avec deux sauts successifs de périodes  $T_1 = 0,3$  et  $T_2 = 0,1$ , on trouve que le point d'intersection avec l'axe des  $x$  est voisin de 2,14.

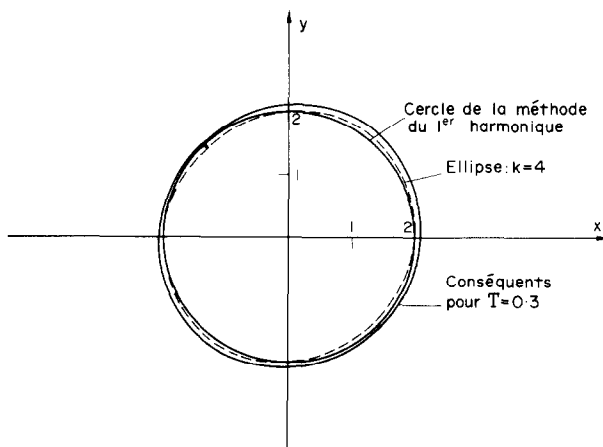


Fig. 14

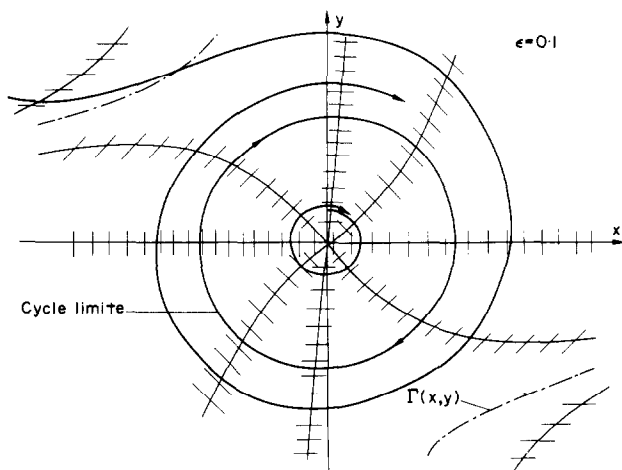


Fig. 15

La Fig. 14 représente l'ellipse  $k = 4$  pratiquement confondue, comme on peut le voir avec le cercle de la méthode du 1er harmonique—ainsi que le cycle "elliptique" du 1er saut correspondant à  $T = 0,3$ . La Fig. 15 représente le tracé des courbes intégrales par la méthode des isoclines et la situation du cycle limite  $C$ .

On remarque également sur la Fig. 15 que la courbe ( $\Gamma$ ) est assez éloignée du cycle limite: on, vérifie là la remarque faite dans le cas général à propos des systèmes faiblement non-linéaires.

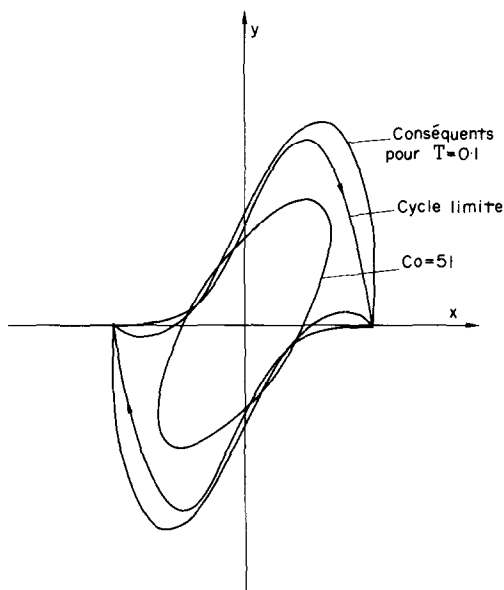


Fig. 16

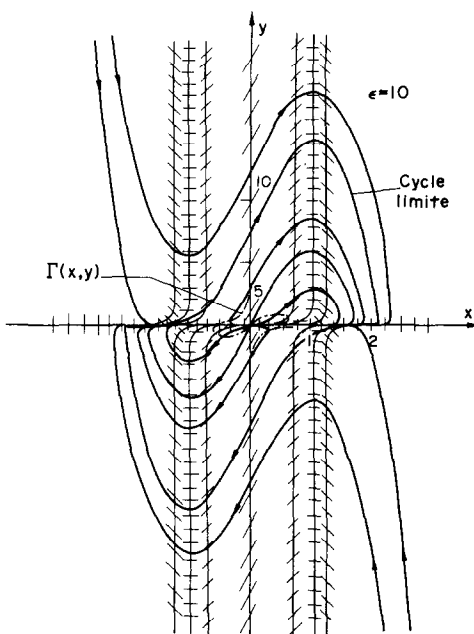


Fig. 17

### 5. Etude succincte du cas $\epsilon = 10$

Nous sommes ici dans un cas fortement non-linéaire. Le point singulier qui était jusqu'alors un foyer répulsif, devient un noeud instable (directions propres 9,89 et 0,11) comme on peut le voir sur la Fig. 17. Le lieu ( $\Gamma$ ) s'écrit ici:

$$(\Gamma) = 10xy(x^2 + 2y^2 - 1) + x^2 + y^2 = 0$$

Il a une allure hyperbolique écrasée sur les axes avec un point double réel à l'origine. Le cycle limite entaille profondément cette courbe ( $\Gamma$ ).

Le cycle  $C_0$  sera ici l'ellipse passant par les points  $x = \pm 1, y = 0$ , c'est-à-dire par les points d'intersection du cercle de la méthode directe de Liapounoff (cf. étude du cas général). Soit:

$$51x^2 - 10xy + y^2 = 51$$

La transformation des conséquents est ici:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & +T \\ -T & 1 + 10T(1 - x^2) \end{pmatrix}$$

Tandis que celle des antécédents serait:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-10T^2 \bar{x}_n^2}{\Delta} \\ \frac{10T \bar{x}_n \bar{y}_n}{\Delta} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_n \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$$

avec  $\bar{x}_n, \bar{y}_n$  solutions inverses linéaires, et  $\Delta$ :

$$\Delta = 1 + 10T(1 - \bar{x}_n^2) + T^2(1 + 2\bar{x}_n \bar{y}_n)$$

Mais à cause de la grandeur de  $\varepsilon$ , le choix de  $T$  doit être plus faible que dans les cas précédents. Néanmoins, nous avons tracé sur la Fig. 16, le lieu des conséquents de l'ellipse  $C_0$  avec une période  $T = 0,1$ . On remarque que ce cycle  $C_1$  n'est pas tellement éloigné du cycle limite. Il présente en particularité deux véritables points anguleux de coordonnées  $(x = \pm 2,10, y = \pm 0,14)$  situés très près des points quasi-anguleux du cycle limite.

La recherche analytique de l'équation approchée du cycle limite nécessite ici un plus grand nombre de sauts avec des périodes faibles de manière que  $L$  et  $M$  soient petits devant  $\Delta$ .

#### CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce travail une méthode d'approche de la *situation globale* d'un cycle limite, et la recherche de son équation analytique par une méthode balisto-stroboscopique. La détermination des points d'intersection avec l'axe des  $x$  n'a été qu'une vérification accessoire pour le modèle de Van der Pol. Cette méthode se présentant comme un "tir" en plusieurs étapes, on a vu que la principale difficulté était double.

*D'abord* faire choix d'un cycle de départ. Il semble qu'avec la croissance du paramètre non-linéaire, une certaine loi soit établie.

Pour un paramètre très faible, ce cycle (de préférence elliptique) se détache à peine du cercle de la méthode du 1er harmonique.

Pour un paramètre très important, ce cycle tend vers le cercle (le plus petit) de la méthode directe de Liapounoff.

Enfin, pour les cas intermédiaires, il faut tenir compte de l'échancrure du cycle limite avec le lieu des points d'inflexion. Il est donc nécessaire de tracer au préalable les courbes intégrales du système, même d'une manière approchée.

*Ensuite* il faut choisir une période d'échantillonnage et surtout c'est là la principale difficulté (sauf dans certains cas isolés)—*définir la matrice de transformation inverse* qui donne les antécédents afin de pouvoir écrire l'équation analytique des conséquents d'un cycle donné. Il est intéressant de noter ici que le choix de cette période détermine un graphe qui doit englober le cycle limite sans le couper: ce graphe possède ainsi des propriétés antagonistes du critère négatif de Bendixson.

A ce double prix, les résultats obtenus avec un modèle de Van der Pol semblent intéressants, et les équations approchées du cycle limite constituent de très bonnes "fonctions de Liapounoff".

Il resterait à améliorer cette méthode, du point de vue de la convergence et de la précision, en utilisant une période d'échantillonnage qui ne soit plus constante, pour chaque saut, mais qui suive une loi donnée dépendant des coordonnées de chaque point d'un cycle intermédiaire.

#### REFERENCES

1. A. Ajzerman, *Stabilité Absolue des Systèmes Régulés Non-Linéaires*. Gostekhizdat, Moscou (1963).
2. N. N. Krasovski, On the global stability of a system of non-linear differential equations, *Prikl. Mat. Mech.* **18**, 735-737 (1954).
3. D. G. Schultz and J. E. Gibson. The variable gradient method for generating Liapunov functions, *A.I.E.E. Trans.*, Part 2, pp. 203-210 (Sept. 1962).

**Аннотация** — Для заданной непрерывной системы  $\dot{x} = X(x, y)$ ,  $\dot{y} = Y(x, y)$ , топологические изображения интегральных кривых которой характеризуются наличием сингулярной точки асимптотически неустойчивой, но окруженной устойчивым предельным циклом в заданной области, расположение этого предельного цикла определяется при помощи метода, который назовем баллистостробоскопическим. Исходя из дискретной системы, ассоциированной с данной непрерывной моделью, избирается некоторая часть цикла начальных условий, подобранная подходящим образом в качестве базиса для стрельбы, которой отдельные этапы управляются при помощи надлежаще избранных периодов. В каждый из периодов начальный цикл стробоскопически деформируется и сходится к предельному циклу периодического решения. Численное приложение дается в деталях для модели Ван-дер-Поля в случае  $\varepsilon = 1$ ; исследованы также случаи  $\varepsilon = 0,1$  и  $\varepsilon = 10$ .