

VRDOLJAK, B.

On Certain Solutions of Van der Pol's Equation

The paper deals with the behaviour of certain classes of Cauchy's solutions of Van der Pol's equation

$$\varepsilon y'' - (1 - y^2) y' + y = 0 \quad (' = d/dt) \quad (1)$$

on $I = (a, b)$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter.

Let us consider the behaviour of the solutions of (1) in the neighbourhood of an arbitrary integral curve $K = \{(y, t) : y = v(t; \varepsilon), t \in I\}$, $v \in C^1(I)$. Let $p, q \in R$, $p > 0$, $r \in C^1(I)$, $r(t) > 0$ on I and

$$s = \{(y, t) : |y - v(t; \varepsilon)| \leq r(t), t \in I\}.$$

We shall use the functions $f(y) \equiv -q + (1 - y^2)/\varepsilon$, $g(y) \equiv -[q^2 + (1 - q + qy^2)/\varepsilon]/p$, $h(y, t) \equiv (y + v)v'/(p\varepsilon)$, $G \equiv g - h$ and notations $y_0 = y(t_0; \varepsilon)$, $y'_0 = y'(t_0; \varepsilon)$, $v_0 = v(t_0; \varepsilon)$, $\tilde{y}_0 = y_0 - v_0$, $r_0 = r(t_0)$, $t_0 \in I$.

Theorem 1:

(i) Let p, q, ε and r be such that

$$r'/r > \sup_{(y, t) \in s} \{p + q, f + |G|\}, \quad (2)$$

then all solutions $y(t; \varepsilon)$ of (1) satisfying initial conditions

$$|y_0 - v_0| \leq r_0, \quad |y'_0 - v'_0 - q\tilde{y}_0| \leq pr_0, \quad t_0 \in I, \quad (3)$$

satisfy also condition

$$|y(t; \varepsilon) - v(t; \varepsilon)| < r(t) \quad \text{for every } t \in (t_0, b). \quad (4)$$

(ii) If

$$p + q < r'/r < f - |G| \quad \text{on } s \quad \text{or} \quad f + |G| < r'/r < q - p \quad \text{on } s, \quad (5), (6)$$

then problem (1)–(3) has a one-parameter class of solutions satisfying condition (4).

Proof: Let us introduce the substitute $y' = px + qy$, where $x = x(t; \varepsilon)$ is a new unknown function. Equation (1) is transformed into a system of equations

$$x' = f(y)x + g(y)y, \quad y' = px + qy. \quad (7)$$

Let $(u(t; \varepsilon), v(t; \varepsilon), t)$, $t \in I$, $u \in C^1(I)$, $u(t_0; \varepsilon) = u_0$, be an integral curve of system (7). Let

$$D = R^2 \times I, \quad d_1 = \{(x, y, t) \in D : |x - u| < r, |y - v| < r\},$$

$$X_i = \{(x, y, t) \in \text{Cl} d_1 : H_i \equiv (-1)^i x + (-1)^{i-1} u - r = 0\},$$

$$Y_i = \{(x, y, t) \in \text{Cl} d_1 : K_i \equiv (-1)^i y + (-1)^{i-1} v - r = 0\}, \quad i = 1, 2.$$

Let m be a tangential vector on the integral curve $(x(t; \varepsilon), y(t; \varepsilon), t)$ of (7) in points of the surface $\partial d_1 = X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2$. Let us consider now the scalar products

$$\begin{aligned} P_{x_i} &= (\text{grad } H_i, m) = (-1)^i x' + (-1)^{i-1} u' - r' = (-1)^i (fx + gy) + (-1)^{i-1} u' - r' = \\ &= (-1)^i [f(u + (-1)^i r) + gy] + (-1)^{i-1} u' - r' = fr + (-1)^i g(y - v) + \\ &\quad + (-1)^i (fu + gv) + (-1)^{i-1} u' - r' = fr + (-1)^i G(y - v) - r', \end{aligned}$$

$$P_{y_i} = (\text{grad } K_i, m) = (-1)^i y' + (-1)^{i-1} v' - r' = (-1)^i p(x - u) + qr - r'; \quad i = 1, 2.$$

(i) In view of (3) we have $P_{x_i} \leq fr + |G|r - r' < 0$, $P_{y_i} \leq pr + qr - r' < 0$, $i = 1, 2$ on ∂d_1 . Accordingly, the set ∂d_1 is a set of points of strict entrance of integral curves of system (7) with respect to the sets d_1 and D . Hence, all solutions of (7) satisfying initial conditions $|x_0 - u_0| \leq r_0$, $|y_0 - v_0| \leq r_0$ satisfy also the conditions $|x(t; \varepsilon) - u(t; \varepsilon)| < r(t)$, $|y(t; \varepsilon) - v(t; \varepsilon)| < r(t)$ for every $t \in (t_0, b)$. Since $x_0 - u_0 = (y'_0 - v'_0 - q\tilde{y}_0)/p$, all solutions of problem (1)–(3) satisfy condition (4).

(ii) In view of (5) we have $P_{x_i} \geq fr - |G|r - r' > 0$, $P_{y_i} \leq pr + qr - r' < 0$, $i = 1, 2$, on ∂d_1 . In view of (6) we have $P_{x_i} \leq fr + |G|r - r' < 0$, $P_{y_i} \geq -pr + qr - r' > 0$, $i = 1, 2$, on ∂d_1 . In this case $X_1 \cup X_2$ is a set of points of strict exit, and $Y_1 \cup Y_2$ is a set of points of strict entrance (or reverse) of integral curves of (7) with respect to the sets d_1 and D . According to T. WAŻEWSKI's retraction method (see [3–5]), system (7) has a one-parameter class of solutions belonging to the set d_1 for every $t \in I$. Hence, problem (1)–(3) also has a one-parameter class of solutions satisfying condition (4).

For certain values p and q we can obtain very interesting results. Let $w(t) \equiv (2|v| + r)|v'|$

Corollary 1:

(i) For $p = 1$, $q = -1 - c$, $0 < c < 2/5$, $\varepsilon < 1$ the statement of Theorem 1 (i) is valid for every integral curve K in

$$S = \{(y, t) : 3/2 + 2\varepsilon + w/2 \leq y^2 \leq 1 + 1/c - w/c, t \in I\},$$

where $r'/r > -c$ on I ($s \subset S$).

(ii) For $p = 1$, $q = -1 - c$, $0 < c \leq 1/4$, $\varepsilon \leq 1/4$ the statement of Theorem 1 (ii) is valid for every integral curve K in

$$S = \{(y, t) : 3/2 + 3\varepsilon + w/2 \leq y^2 \leq 1 + (1 - 2\varepsilon)/c - w/c, t \in I\},$$

where $-2 - c - c^2 < r'/r < -2 - c$ on I .

(iii) For $p = 1/\varepsilon$, $q = (1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2\varepsilon$, $\varepsilon \leq 1/4$ the statement of Theorem 1 (i) is valid for every integral curve K in $S = R \times I$, where $r'/r > (3 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2\varepsilon$, $w \leq 1/\varepsilon$ on I .

For example for (i): $r(t) \equiv C$, $C > 0$ is an arbitrary constant, $I = (-\infty, \infty)$ or $r(t) \equiv C/(t + T + 2/c)$, $C, T > 0$, $I = (-T, \infty)$. For (ii): $r(t) \equiv C \exp[-(2 + c + c^2/2)(t + T)]$, $C, T > 0$, $I = (-T, \infty)$.

Let us consider now solutions of equation (1) which satisfy the initial condition

$$p^2(y_0 - v_0)^2 + (y'_0 - v'_0 - q\tilde{y}_0)^2 \leq p^2r_0^2, \quad t_0 \in I. \quad (8)$$

Theorem 2: Let p, q, ε and r be such that

$$(p + G)^2 < 4(f - r'/r)(q - r'/r), \quad q - r'/r < 0 \quad \text{on } s \quad (9)$$

or

$$|p + G| < 2(r'/r - f), \quad q - f \leq 0 \quad \text{on } s \quad (10)$$

or

$$|p + G| < 2(r'/r - q), \quad f - q \leq 0 \quad \text{on } s.$$

Then all solutions $y(t; \varepsilon)$ of problem (1)–(8) satisfy condition (4).

Proof: Equation (1) is transformed into system (7). Let (u, v, t) , $t \in I$, $u \in C^1(I)$ be an integral curve of (7) and let $d_2 = \{(x, y, t) \in D: H \equiv (x - u)^2/r^2 + (y - v)^2/r^2 < 1\}$. Let m be a tangential vector on the integral curve (x, y, t) of (7) in points of surface ∂d_2 . Now, according to the conditions of the theorem and SYLVESTER's criterion it can be shown that

$$P = ((1/2) \text{grad } H, m) = (f - r'/r)(x - u)^2/r^2 + (p + G)(x - u)(y - v)/r^2 + (q - r'/r)(y - v)^2/r^2 < 0$$

on ∂d_2 . Consequently, the set ∂d_2 is a set of points of strict entrance of integral curves of system (7) with respect to the sets d_2 and D . This grants that the Theorem 2 is valid.

By using Theorem 2 we can prove

Corollary 2:

(i) For $p = 1$, $q = -1 - c$, $0 \leq c \leq 1/3$, $\varepsilon \leq 1/3$ (in view of (10)) the statement of Theorem 2 is valid for every integral curve K in $S = \{(y, t): y^2 \leq 1 + 2(1 + c)\varepsilon, t \in I\}$, where $r'/r \geq 3/\varepsilon + w/2$ on I .

(ii) For $p = 1/\varepsilon$, $q = 0$ for $\varepsilon > 0$ (in view of (9)) the statement of Theorem 2 is valid for every integral curve K in $S = \{(y, t): y^2 \geq 1 + \varepsilon^2 w^2, t \in I\}$, $r'/r > 0$.

For example for (ii) (b): $r(t) \equiv C/(1 + T - t)$, $C, T > 0$, $I = (-\infty, T)$ or $r(t) \equiv C[1 - 1/(1 + T + t)]$, $C, T > 0$, $I = (-T, \infty)$.

In view of Corollary 1 (iii), Corollary 2 (i) and (ii) we can give the following corollary which is especially interesting.

Corollary 3: All solutions $y(t; \varepsilon)$ of (1) satisfying initial conditions

$$|y_0| \leq r_0, \quad |y'_0 - y_0(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2\varepsilon| \leq r_0,$$

where $r'/r > (3 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})/2\varepsilon$ on I , $\varepsilon \leq 1/4$, or $(y_0)^2 + [y'_0 + (1 + c)y_0]^2 \leq r_0^2$, where $r'/r \geq 3/\varepsilon$, $0 < r < 1 + 2\varepsilon$ on I , $0 \leq c \leq 1/3$, $\varepsilon \leq 1/3$, or $(y_0)^2 + \varepsilon(y'_0)^2 \leq r_0^2$, where $r'/r > 1/\varepsilon$ on I , $\varepsilon > 0$, satisfy also the condition

$$|y(t; \varepsilon)| < r(t) \quad \text{for every } t \in (t_0, b).$$

For example (for all cases): $r(t) \equiv C \exp[3(t - T)/\varepsilon]$, $0 < C < 1$, $T > 0$, $I = (-\infty, T)$.

References

- 1 MACGILLIVRAY, A. D., On the leading term of the inner asymptotic expansion of Van der Pol's equation, SIAM J. Appl. Math. **43** (1983), 594–612.
- 2 MACGILLIVRAY, A. D., On the leading term of the outer asymptotic expansion of Van der Pol's equation, SIAM J. Appl. Math. **43** (1983), 1221–1239.
- 3 VRDOLJAK, B., Curvilinear "tubes" in the retraction method and the behaviour of solutions for the system of differential equations, Mat. vesnik **4** (17) (32) (1980), 381–392.
- 4 VRDOLJAK, B., On parameter classes of solutions for system of linear differential equations, Glasnik Mat. **20**(40) (1985), 61–69.
- 5 WAŻEWSKI, T., Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires, Ann. de la Soc. polon. de Math. **20** (1947), 279–313.

Address: Dr. BOŽO VRDOLJAK, Faculty of Civil Engineering, University of Split, P.O. Box 389, 58000 Split, Yugoslavia

WALLASCHEK, J.

Erzwungene Schwingungen freier Rechteckplatten

Erzwungene Schwingungen Kirchhoffscher Rechteckplatten werden durch

$$D\Delta^2 w(x, y, t) + \rho h \ddot{w}(x, y, t) = f(x, y, t) \quad (1)$$

beschrieben, wobei $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ die Plattensteifigkeit, ρ die Dichte, E der Elastizitätsmodul, h die Plattendicke und ν die Querkontraktionszahl ist. Im Fall einer harmonischen Erregung

$$f(x, y, t) = F(x, y) e^{j\Omega t} \quad (2)$$

führt der Ansatz

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{j\Omega t}$$

auf die partielle Differentialgleichung

$$\Delta^2 W(x, y) - \beta^4 W(x, y) = \frac{F(x, y)}{D} \quad (3)$$

mit dem Parameter $\beta^4 = \Omega^2 \rho h / D$.

An den Rändern der freien Platte müssen Biegemoment und Ersatzquerkraft verschwinden:

$$M_x(x, y)|_{x=\pm a} = 0, \quad M_y(x, y)|_{y=\pm b} = 0; \quad V_x(x, y)|_{x=\pm a} = 0, \quad V_y(x, y)|_{y=\pm b} = 0. \quad (4)$$

Der übliche Weg zur Lösung des durch (3) und (4) beschriebenen Randwertproblems, eine Entwicklung in Eigenfunktionen des zugehörigen homogenen Problems, erscheint nicht sinnvoll, da die Bestimmung der Eigenfunktionen auf ein unendlich-dimensionales Matrizenwertproblem führt. Besser ist daher, eine Entwicklung in anderen Funktionenräumen vorzunehmen. Dabei können Symmetrieeigenschaften der Rechteckplatte ausgenutzt werden. Die Belastung $F(x, y)$ wird dazu in 4 Anteile zerlegt, die vollkommen symmetrisch, symmetrisch-antisymmetrisch bzw. vollkommen antisymmetrisch bezüglich der beiden Symmetrielinien der Platte sind:

$$F(x, y) = \sum_{i,j} F_{ij}(x, y), \quad i, j \in \{S, A\}, \quad (5)$$

$$F_{SS}(x, y) = F_{SS}(x, -y) = F_{SS}(-x, y), \quad F_{SA}(x, y) = F_{SA}(x, -y) = -F_{SA}(-x, y) \dots \text{ usw.} \quad (6)$$

Für jeden dieser Anteile bestimmt man den entsprechenden Lösungsanteil getrennt und erhält die gesamte Absenkung als Summe von 4 Anteilen

$$W(x, y) = \sum_{i,j} W_{ij}(x, y), \quad i, j \in \{S, A\}, \quad (7)$$

die jeweils die gleichen Symmetrieeigenschaften besitzen wie die entsprechenden Lastanteile.

Es genügt deshalb, wenn bei der Bestimmung der Lösungsanteile jeweils nur eine Viertelplatte untersucht wird, die man durch „Freischneiden“ entlang der x - bzw. y -Achse erhält (Abb. 1). Die Lösung für jede Viertelplatte wird aus 2 Anteilen superponiert (Abb. 2)

$$W_{ij}(x, y) = W_{ij}^p(x, y) + W_{ij}^h(x, y), \quad i, j \in \{S, A\}. \quad (8)$$

Dabei ist $W_{ij}^p(x, y)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung (3) die jedoch nicht alle Randbedingungen erfüllt. Der Lösungsanteil $W_{ij}^h(x, y)$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung, allerdings mit inhomogenen Randbedingungen, die so gewählt werden, daß die Summen (8) die Randbedingungen des ursprünglichen Problems erfüllen. Man erhält

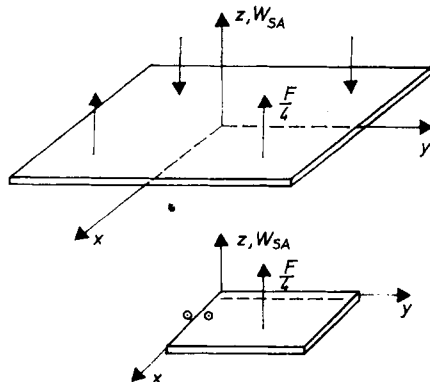


Abb. 1. „Freischneiden“ einer Viertelplatte im symmetrisch-antisymmetrischen Fall. gelenkig gelagert, —○— parallel geführt

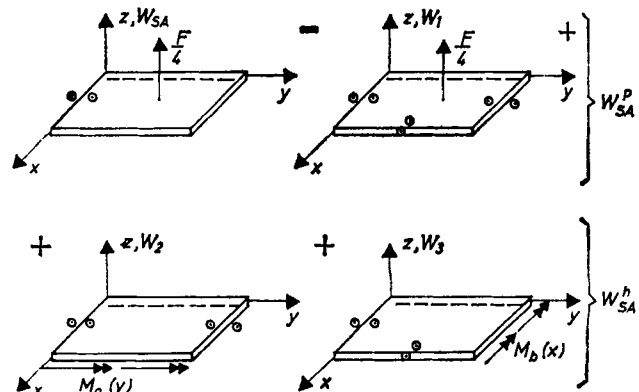


Abb. 2. Superposition im symmetrisch-antisymmetrischen Fall

aus diesen „Superpositionsbedingungen“ ein inhomogenes Gleichungssystem für die Fourierkoeffizienten der Rand-schnittgrößen.

Die vorgestellte Methode wurde erfolgreich verwendet, um die Greensche Funktion der freien Platte bei Kraft-erregung zu bestimmen. Man setzt dazu

$$f(x, y, t) = \hat{F} \delta(x - \xi, y - \eta) e^{j\Omega t} \quad (9)$$

und erhält die Greensche Funktion als

$$G(x, y, \xi, \eta, \Omega) = \frac{1}{\hat{F}} W(x, y). \quad (10)$$

Literatur

- 1 GORMAN, D. J., Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier North Holland, Inc., New York/Amsterdam/Oxford 1982.
- 2 HAGEDORN, P.; KELKEL, K., Study of Plate Impedances, ESTEC 5683/83/NL/PP(SC), 1985.
- 3 WALLASCHKE, J., Zwangs-erregte Schwingungen einer freien Rechteckplatte, Diplomarbeit im Fachbereich Mechanik der TH Darmstadt, 1984.

Anschrift: Dipl.-Ing. JÖRG WALLASCHKE, Institut für Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt, Hochschulstraße 1, D-6100 Darmstadt, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 104 – T 106

WAUER, J.

Die dünne, elastische Kreiszylinderschale unter axialem Druck — verschiedene Approximationen im Vergleich

In Ergänzung zu den meisten Arbeiten auf dem Gebiet der Stabilität dünner Flächentragwerke, die die maßgebenden Gleichungssätze für weitgehend beliebige Schalen- oder Plattengeometrien und Belastungen mit dem Tensor-kalkül sehr allgemein und computerorientiert aufbereiten, s. z. B. [1, 2], sollen hier verschiedene Approximations-stufen der grundsätzlich geläufigen nichtlinearen Stabilitätstheorie in den wesentlichen Rechenschritten formel-mäßig verglichen werden. Ansätze dazu finden sich schon in [3] (nicht konsistent) und [4], wobei die in [4] benutzte Schreibweise auch hier weitgehend verwendet wird. Notwendig ist dann jedoch eine einfache Schalengeometrie samt Belastung. Die Kreiszylinderschale unter axialem, gleichförmigem Druck ist ein geeignetes Fallbeispiel.

Vorausgesetzt werden die üblichen Vereinfachungen elastischen Materialverhaltens, kleiner Verzerrungen und der Kirchhoff-Loveschen Normalenhypothese.

Zunächst ist die Geometrie der unverformten, spannungslosen Schale zu beschreiben. Ausgehend vom Orts-vektor

$$\overset{0}{x} = R \cos \varphi_2 \overset{0}{i}_1 + R \sin \varphi_2 \overset{0}{i}_2 + R \varphi_1 \overset{0}{i}_3 \quad (1)$$

zu einem Punkt S_0 der undeformierten Schalenmittelfläche (R mittlerer Radius) lassen sich die kovarianten Basis-vektoren $\overset{0}{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) in der Form

$$\overset{0}{a}_1 = R \overset{0}{i}_3, \quad \overset{0}{a}_2 = -R \sin \varphi_2 \overset{0}{i}_1 + R \cos \varphi_2 \overset{0}{i}_2, \quad \overset{0}{a}_3 = -R \cos \varphi_2 \overset{0}{i}_1 - R \sin \varphi_2 \overset{0}{i}_2 \quad (2)$$

auswerten. Für die später benötigten Ableitungen nach den Koordinaten φ_α ($\alpha = 1, 2$) benutzt man die bekannten Ableitungsgleichungen von GAUSS und WEINGARTEN, die sich mit modifizierten Christoffel-Symbolen $\overset{0}{A}_{i\alpha}^s$ [5] noch kompakter schreiben lassen:

$$\overset{0}{a}_{i,\alpha} = \overset{0}{A}_{i\alpha}^s \overset{0}{a}_s. \quad (3)$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Basisvektoren $\overset{0}{g}_i$ für einen durch den Ortsvektor

$$\overset{0}{\xi} = \overset{0}{x} + \overset{0}{r} = \overset{0}{x} + \varphi_3 \overset{0}{a}_3 \quad (4)$$

gekennzeichneten Schalenpunkt P_0 außerhalb der Schalenmittelfläche berechnen:

$$\overset{0}{g}_1 = \overset{0}{a}_1, \quad \overset{0}{g}_2 = (1 - \varphi_3) \overset{0}{a}_2, \quad \overset{0}{g}_3 = \overset{0}{a}_3. \quad (5)$$

Der spannungslose Ausgangszustand (S_0, P_0) geht durch eine Belastung und damit einhergehende Deformationen

$$\mathbf{u} = u^i \overset{0}{a}_i, \quad \mathbf{v} = v^i \overset{0}{a}_i \quad (6)$$

in die aktuelle Konfiguration

$$S: \mathbf{x} = \overset{0}{x} + \mathbf{u}, \quad P: \mathbf{\xi} = \overset{0}{\xi} + \mathbf{v} (= \mathbf{x} + \mathbf{r} = \mathbf{x} + \varphi_3 \overset{0}{a}_3) \quad (7)$$

über. Die maßgebenden Basisvektoren \mathbf{a}_i , \mathbf{g}_i des verformten Schalenkontinuums berechnen sich unter Verwendung von (3) als Funktion der Verschiebungskoordinaten u^i und ihrer Ableitungen. Z. B. erhält man für die Basisvektoren \mathbf{a}_i der deformierten Mittelfläche

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1 + u_{,1}^1) \mathbf{a}_1^0 + u_{,1}^2 \mathbf{a}_2^0 + u_{,1}^3 \mathbf{a}_3^0, & \mathbf{a}_2 &= u_{,2}^1 \mathbf{a}_1^0 + (1 + u_{,2}^2 - u^3) \mathbf{a}_2^0 + u_{,2}^3 \mathbf{a}_3^0, \\ \mathbf{a}_3^{(2)} &= [-u_{,1}^3 + u_{,1}^3 u_{,1}^1 + (u_{,2}^3 + u^2) u_{,1}^2] \mathbf{a}_1^0 + [-(u_{,2}^3 + u^2) + u_{,1}^3 u_{,2}^1 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^2 - u^3)] \mathbf{a}_2^0 + \\ &\quad + [1 - \frac{1}{2} (u_{,1}^3 u_{,1}^3 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^3 + u^2))] \mathbf{a}_3^0, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei \mathbf{a}_3 eine nichtlineare Funktion der u^i , $u_{,i}^j$ ist, die zweckmäßig in einer Potenzreihenentwicklung dargestellt wird, hier in quadratischer, d. h. zweiter Näherung. Auf der Basis der zweiten Gleichung in (7) ist man dann auch in der Lage, unter Verwendung von (8) den Verschiebungsvektor \mathbf{v} eines allgemeinen Schalenpunktes durch den des zugeordneten Mittelflächenpunktes, d. h. \mathbf{u} , auszudrücken,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \varphi_3(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_3^0) = \mathbf{u} + \varphi_3 \mathbf{w} \quad (9)$$

und hier wieder in zweiter Näherung auszuwerten:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)} &= \{u^1 + \varphi_3[-u_{,1}^3 + u_{,1}^3 u_{,1}^1 + (u_{,2}^3 + u^2) u_{,1}^2]\} \mathbf{a}_1^0 + \{u^2 + \varphi_3[-(u_{,2}^3 + u^2) + \\ &\quad + u_{,1}^3 u_{,2}^1 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^2 - u^3)]\} \mathbf{a}_2^0 + \{u^3 - \frac{1}{2} \varphi_3[u_{,1}^3 u_{,1}^3 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^3 + u^2)]\} \mathbf{a}_3^0. \end{aligned} \quad (10)$$

An dieser Stelle kann auch eine Verbindung zu dem z. B. von PIETRASZKIEWICZ [6] eingeführten Konzept moderater Drehungen einfach hergestellt werden. Dabei wird der Differenzvektor \mathbf{w} in (9) durch einen Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ ausgedrückt. Beschränkt man sich nun auf sog. moderate Drehungen, so zeigt eine auf BASAR [7] zurückgehende konkrete Auswertung, daß (für Kreiszylinderschalen) das Konzept moderater Drehungen mit der hier bevorzugten, allein in Verschiebungsgrößen arbeitenden Theorie der zweiten Näherung identisch ist.

Nunmehr ist man in der Lage, den Verzerrungszustand des Schalenkontinuums mit Hilfe des Greenschen Verzerrungstensors ε_{ik} zu beschreiben. Infolge der vorausgesetzten Normalenhypothese verbleiben als von Null verschieden allein die Elemente $\varepsilon_{\alpha\beta}$, und mit den in (5) und (10) bereitgestellten Größen \mathbf{g}_i bzw. \mathbf{v} können die Verzerrungen

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_\alpha \mathbf{v}_\beta + \mathbf{g}_\beta \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\beta) \quad (11)$$

in konsequenter Fortführung der bisher in zweiter Näherung erhaltenen Ergebnisse ebenfalls in quadratischer Approximation

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(2)} &= \underline{u_{,1}^1 - \varphi_3 u_{,1}^3 + \frac{1}{2} u_{,1}^3 u_{,1}^3 + \frac{1}{2} (u_{,1}^1 u_{,1}^1 + u_{,1}^2 u_{,1}^2)} + \varphi_3 [u_{,1}^3 u_{,1}^1 + (u_{,2}^3 + u^2) u_{,1}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_3 [u_{,1}^3 u_{,1}^3 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^3 + u^2)]], \\ \varepsilon_{22}^{(2)} &= \underline{(1 - \varphi_3) (1 - \varphi_3) (u_{,2}^2 - u^3) - \varphi_3 (1 - \varphi_3) (u_{,2}^3 + u^3) + \frac{1}{2} \varphi_3 (1 - \varphi_3) u_{,1}^3 u_{,1}^3 +} \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - \varphi_3) (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^3 + u^2) + \varphi_3 (1 - \varphi_3) [u_{,1}^3 u_{,2}^1 + u_{,1}^3 u_{,2}^2 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^2 - u^3) + \\ &\quad + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^2 - u^3)] + \frac{1}{2} [u_{,2}^1 u_{,2}^1 + (u_{,2}^2 - u^3) (u_{,2}^2 - u^3)] - \frac{1}{2} \varphi_3 [u_{,1}^3 u_{,2}^3 + \\ &\quad + (u_{,2}^2 - u^3) (u_{,2}^3 + u^2)] + \frac{1}{2} \varphi_3 \varphi_3 [u_{,1}^3 u_{,2}^3 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^3 + u^2)], \\ \varepsilon_{12}^{(2)} &= \underline{\frac{1}{2} [(u_{,1}^2 + u_{,1}^2) - \varphi_3 (2 - \varphi_3) (u_{,1}^3 + u_{,1}^2)] + \frac{1}{2} (1 - \varphi_3) u_{,1}^3 (u_{,2}^3 + u^2) +} \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_3 [u_{,1}^3 u_{,1}^2 + (u_{,2}^3 + u^2) u_{,1}^2] + \frac{1}{2} \varphi_3 (1 - \varphi_3) [u_{,1}^3 u_{,2}^1 + u_{,1}^3 u_{,2}^2 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^2 - u^3) + \\ &\quad + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^2 - u^3)] + \frac{1}{2} [u_{,1}^1 u_{,2}^1 + u_{,1}^2 (u_{,2}^2 - u^3)] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \varphi_3 [u_{,1}^3 u_{,2}^3 + (u_{,2}^2 - u^3) (u_{,2}^3 + u^2)] + \frac{1}{2} \varphi_3 \varphi_3 [u_{,1}^3 u_{,2}^3 + (u_{,2}^3 + u^2) (u_{,2}^3 + u^2)] \end{aligned} \quad (12)$$

angegeben werden [8]. Verschiedene aus der Literatur bekannte Theorien ordnen sich in (12) als Sonderfälle problemlos ein, so die auf FLÜGGE [9] zurückgehende lineare Schalentheorie (durchgezogen unterstrichen), das einfachste nichtlineare, sog. DONNELLsche Konzept [10] (gestrichelt markiert) oder auch eine verbesserte nichtlineare Schalentheorie im Sinne KÁRMÁNS (strichpunktiert gekennzeichnet). Schließlich können auch die maßgebenden Relationen bei unverzerrbarer Schalenmittelfläche abgelesen werden, wenn man in zweiter Näherung die gepunktet unterstrichenen Terme in (12) Null setzt.

Wird zur Herleitung des maßgebenden nichtlinearen Randwertproblems zur Stabilitätsuntersuchung der Kreiszylinderschale unter axialem Druck das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta(V_i + V_a) = 0 \quad (13)$$

herangezogen, so verbleibt die Berechnung des elastischen Potentials V_i und des Potentials V_a der richtungstreu vorausgesetzten, äußeren axialen Druckbelastung. Unter der an dieser Stelle üblichen Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes erhält man dann für V_i (L axiale Schalenlänge, h Schalendicke, E und ν elastische Konstanten)

nach längerer Rechnung

$$V_i = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^{L/R} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2R}^{h/2R} (1-\varphi_3) \left[\varepsilon_{11} \varepsilon_{11} + \frac{\varepsilon_{22} \varepsilon_{22}}{(1-\varphi_3)(1-\varphi_3)(1-\varphi_3)(1-\varphi_3)} + 2\nu \varepsilon_{11} \right. \\ \left. \times \frac{\varepsilon_{22}}{(1-\varphi_3)(1-\varphi_3)} + 2(1-\nu) \frac{\varepsilon_{12} \varepsilon_{12}}{(1-\varphi_3)(1-\varphi_3)} \right] R d\varphi_3 R d\varphi_2 R d\varphi_1, \quad (14)$$

das mit (12) in kubischer Näherung auszuwerten ist, während sich für V_a (f_0 gleichförmig verteilte Streckenlast)

$$V_a = f_0 \int_0^{2\pi} u^1 R d\varphi_2 R|_{\varphi_1=0}^{L/R} = 2\pi R f_0 R u^1|_0^{L/R} \quad (15)$$

ergibt. Im Falle einer unverzerrbaren Mittelfläche existiert für $u^1|_0^{L/R}$ eine innere Zwangsbedingung (wieder in zweiter Näherung)

$$u^1|_0^{L/R} = -\frac{1}{2} \int_0^{L/R} (u_{,1}^1 u_{,1}^1 + u_{,1}^2 u_{,1}^2 + u_{,1}^3 u_{,1}^3) d\varphi_1. \quad (16)$$

Die restlichen (langwierigen) Rechenschritte auf dem Wege zu einem Stabilitätsnachweis bieten grundsätzlich nichts Neues und werden aus Platzgründen nur noch stichwortartig abgehandelt. Das Ausführen der in (13) verlangten Variationen liefert ein quadratisch nichtlineares Randwertproblem in den Verschiebungskordinaten $u^i(\varphi_\alpha)$ einschließlich Randbedingungen, das eine (z. B. in tiefster Näherung lineare) Berechnung des auf Stabilität zu untersuchenden Grundzustandes $u_0(\varphi_1)$ erlaubt. Die Stabilitätsgleichungen findet man anschließend mit dem üblichen Störungsansatz $u = u_0 + \Delta u$ als lineares Eigenwertproblem in den $u^i(\varphi_\alpha)$ für die Last f_0 . Unter den einfachst denkbaren Randbedingungen [9] läßt sich das erhaltene Eigenwertproblem algebraisieren. Die charakteristische Gleichung der resultierenden Matrizenwertaufgabe ermöglicht schließlich den eigentlichen Stabilitätsnachweis. Die formelmäßige Angabe der zugehörigen Matrixelemente a_{ij} , b_{ij} und eine zahlenmäßige Berechnung der jeweiligen Beullasten läßt dann nochmals die Unterschiede der einzelnen Stabilitätskonzepte deutlich werden.

Im Rahmen einer an anderer Stelle beabsichtigten Arbeit sollen diese Ergebnisse und einige weitere dazu ausführlich dargestellt werden.

Literatur

- 1 KRÄTZIG, W. B.; BASAR, Y.; WITTEK, U., in Buckling of Shells (Ed.: E. RAMM), Berlin/Heidelberg/New York 1982, S. 19.
- 2 STEIN, E.; BERG, A.; WAGNER, W., in Buckling of Shells (Ed.: E. RAMM), Berlin/Heidelberg/New York 1982, S. 91.
- 3 HORST, H., Mitt. Inst. Statik TU Hannover Nr. 14, Hannover 1969.
- 4 PETER, J., Mitt. Inst. Statik TU Hannover Nr. 19, Hannover 1974.
- 5 SCHROEDER, F. H., Z. Flugwiss. 20 (1972), S. 430.
- 6 PIETRASZKIEWICZ, W., Mitt. Inst. f. Mech., Nr. 26, Ruhr-Univ. Bochum, 1981.
- 7 BASAR, Y., in Konstr. Ing.-bau-Berichte Nr. 38/39, Essen 1981, S. 12.
- 8 BREITMAIER, R., Studienarbeit Inst. f. Techn. Mech. Univ. Karlsruhe, 1985 (unveröffentl.).
- 9 FLÜGGE, W., Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1962.
- 10 DONELL, L. H., N.A.C.A. Report Nr. 479, 1933.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. J. WAUER, Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe, Kaiserstraße 12, D-7500 Karlsruhe 1, BRD

Zur Konvergenz linearer Identifikationsverfahren

1. Problemstellung

Zur Frequenzanalyse von Meßsignalen wird in den Anwendungen [1, 2] die Approximation durch Polygonzüge vorgeschlagen. Ein typisches Element hierfür ist das bekannte Rechteckspektrum, dessen Zeitverlauf mit

$$x(t) = x_0 \sin \omega_0 t / \omega_0 t, \quad (t \geq 0, x \in R^1) \quad (1)$$

angegeben wird. Interessant ist dann die Frage nach der Eigenwertverteilung dieses Signals und nach der zugehörigen Struktur zeitinvarianter mechanischer Systeme, die eine lineare Berechnung der physikalischen Parameter zulassen.

2. Lineare Identifikation

Die Berechnung der Eigenwertverteilung von $x(t)$ erfolgt über dynamische Systeme in Form der Einzeldifferentialgleichung

$$\sum_{i=0}^n \hat{T}_i^i x^{(i)}(t) = 0, \quad (t \geq 0, \hat{T}_0^0 = 1). \quad (2)$$

Hierin sind $x^{(i)}(t)$ Zeitableitungen von (1), und \hat{T}_i^i ($i = 0, 1, \dots, n$) bezeichnen charakteristische Parameter, wobei \hat{T}_0^0 aus Homogenitätsgründen normiert gewählt wird. Im Sinne der L_2 -Norm [3, 4] ist die Identifikation der charakteristischen Parameter optimal, wenn sie aus folgender Minimalforderung ermittelt werden:

$$\int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^n \hat{T}_i^i x^{(i)}(t) \right]^2 dt = \text{Min!} \quad (\hat{T}_0^0 = 1). \quad (3)$$

Die Differentiation nach \hat{T}_i^i liefert dann ein lineares symmetrisches Gleichungssystem als notwendige Bedingung für die Existenz des Minimums. Für eine Approximation der Ordnung $n = 4$ ergibt sich z. B. die dimensionslose Form

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/5 & 1/9\pi \\ 0 & 1/5 & -1/9\pi & -1/7 \\ -1/5 & -1/9\pi & 1/7 & 0 \\ 1/9\pi & -1/7 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_1 \omega_g \\ (\hat{T}_2 \omega_g)^2 \\ (\hat{T}_3 \omega_g)^3 \\ (\hat{T}_4 \omega_g)^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\pi \\ 1/3 \\ -2/3\pi \\ -1/5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

für jede Grenzfrequenz ω_g des Signals $x(t)$.

Den Aufbau der Identifikationsmatrizen der Form (4) kann man nach folgender Rekursion

$$\int_0^\infty x^{(n)}(t) x^{(n+m)}(t) dt = -x^{(n)}(0) x^{(n+m-1)}(0) - \int_0^\infty x^{(n+1)}(t) x^{(n+m-1)}(t) dt, \quad (m \geq 2, n = 0, 1, \dots) \quad (5)$$

fortsetzen, wenn die Anfangsbedingungen und die Hauptdiagonalelemente für das spezielle Beispiel (1) bekannt sind:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty [x^{(n)}(t)]^2 dt &= \frac{x_0^2 \omega_g^{2n}}{2\omega_g^{2n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{AB: } x^{(2n+1)}(0) &= 0, \quad x^{(2n)}(0) = x_0 \frac{1}{2n+1} (-\omega_g^2)^n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Anfangsbedingungen ergeben sich aus einer Taylorentwicklung von $x(t)$. Die Hauptdiagonalelemente folgen aus der Parsevalschen Gleichung oder aus dem zu (1) gehörenden Operator

$$x^{(n+2)}(t) + \left[\frac{2}{t} \dot{x}(t) \right]^{(n)} + \omega_g^2 x^{(n)}(t) = 0 \quad (7)$$

mit Hilfe der partiellen Integration. Für $n = 0$ ist (7) der lineare Oszillator mit zu Beginn unendlich großer Dämpfung und dann mit zunehmender Zeit verschwindenden Dämpfung.

3. Numerische Konvergenz

Zur numerischen Berechnung der charakteristischen Parameter $(\hat{T}_i \omega_g)^i$ wird ein Gleichungslöser mit Totalpivot-suche eingesetzt. Wir zeigen typische Zahlenergebnisse für die Approximation $n = 14$ und $n = 16$ in Tabelle 1.

Tabelle 1. Typische Ergebnisse für $n = 14$ und 16

$n = 14$	12 Stellen	20 Stellen	25–35	$n = 16$	12 Stellen	25 Stellen	30–35
$(T_1 \omega_g)$	8,470 ...	8,495 ...	8,476 ...	$(T_1 \omega_g)$	8,111 ...	9,630 ...	9,630 ...
$(T_8 \omega_g)^8$	1242,714 ...	1251,483 ...	1233,574 ...	$(T_{11} \omega_g)^{11}$	-63,231 ...	3277,699 ...	3277,614 ...
$(T_{14} \omega_g)^{14}$	46,028 ...	45,101 ...	43,810 ...	$(T_{16} \omega_g)^{16}$	-14,459 ...	73,945 ...	73,942 ...

Diese Rechnung wurde zunächst mit der üblichen 12-Stellen-Gleitkommarechnung durchgeführt. Anschließend wurde der Rechner software-mäßig auf höhere Genauigkeiten umgestellt, um eine 15, 20, ..., 35-Stellen genaue Festkommaarithmetik zu leisten. Man erkennt in der Tabelle 1, daß die übliche auf eine feste Mantissenlänge beschränkte Numerik ab einer gewissen Approximationsordnung stets versagt, indem negative charakteristische Parameter berechnet werden, die bereits die notwendigen Stabilitätsbedingungen in (2) verletzen.

Dies liegt natürlich an der schlechten Kondition der linearen Identifikationsgleichungen, die mit zunehmender Approximationsordnung fast-singulär werden. Wie in Tab. 1 erkennbar, kann man solche numerischen Schwierigkeiten über die oben erwähnte Festkommaarithmetik prinzipiell beheben. Mit variabler und zunehmender Mantissenlänge wird eine beliebige hohe Approximation nur noch durch die Rechenzeit und die Speicherkapazität begrenzt.

4. Eigenwert- und Frequenzverteilungen

Nach Berechnung der Zeitparameter \hat{T}_i kann man die zugehörigen Eigenwerte ermitteln. Hierzu setzt man in (2) den Exponentialansatz ein und löst die zugehörige charakteristische Gleichung. Bild 1 zeigt die konjugiert komplexen Wurzeln dieser Gleichung für die Grenzfrequenz $\omega_g = 1/s$, für den Anfangswert $x_0 = 1[-]$ und für gerade Approximationen $n = 4, 8$ und 12 in der Gaußschen Zahlenebene, gekennzeichnet durch V, A und Z. Man erkennt deutlich eine parabolische Form dieser Eigenwertverteilungen, wobei zwei Häufungspunkte auf der imaginären Achse bei ± 1 und -1 entstehen.

Sind alle Eigenwerte stabil, so kann man die Identifikation überprüfen, indem man die Einzeldifferentialgleichung (2) mittels der Laplace-Transformation löst

$$\sum_{i=0}^n \hat{T}_i [s^i X(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-1-j} x^{(j)}(0)] = 0, \quad (s = i\omega) \quad (8)$$

und die Real- und Imaginäranteile von $X(s)$ in Abhängigkeit von der Frequenz ω aufträgt. In Bild 2 und 3 sind beide für $\omega_g = 1/s$ und $x_0 = 1[-]$ gezeichnet, und zwar sowohl die strengen Lösungen als auch die Approximationen für $n = 1, 2, 3, 4$ und 10 . Der imaginäre Anteil zeigt die typische asymmetrische Verteilung mit den beiden Singularitäten bei $\omega = \pm \omega_g$, der Realteil liefert das Rechteckspektrum mit dem bekannten Gibbsschen Phänomen. Beide konvergieren gleichmäßig im Sinne des quadratischen Mittels. Insbesondere ist diese Konvergenz wesentlich schneller als bei der Approximation durch Fourier-Reihen.

5. Physikalische Parameter

Bei dem vorgegebenem Meßsignal (1) ist eine lineare Umrechnung der charakteristischen Parameter \hat{T}_i in physikalische Daten wie Massen, Steifigkeiten und Dämpfungen möglich, wenn ein geeignetes Schwingungsmodell gewählt wird. Wie in Bild 4 gezeichnet, ist dies eine inhomogene Schwingerkette, die einseitig über eine Feder und einen Dämpfer gefesselt ist.

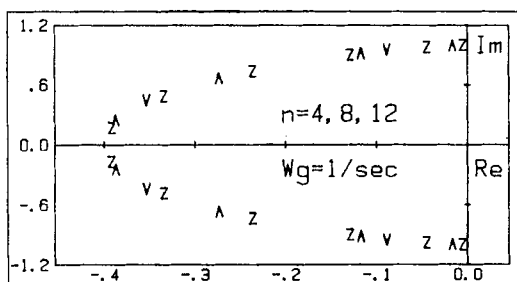


Bild 1. Eigenwertverteilungen des Meßsignals $x(t)$

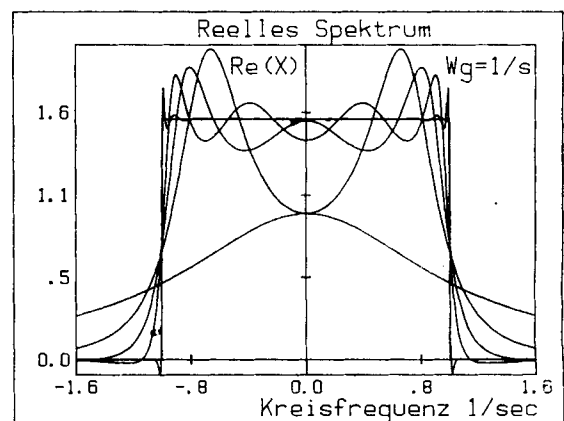


Bild 2. Approximationen der Ordnung $n = 1, 2, 3, 4$ und 10

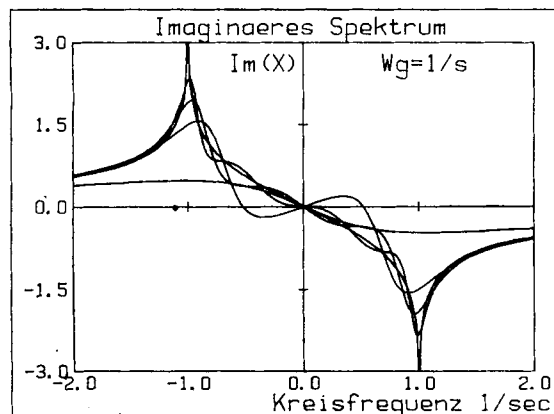


Bild 3. Reelle Spektren für $n = 1, 2, 3, 4$ und 10

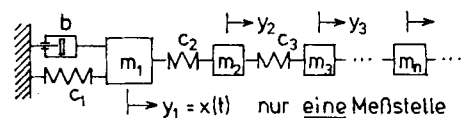


Bild 4. Optimale mechanische Struktur von $x(t)$

Für ein System mit 3 Freiheitsgraden z. B. mit den 6 Parametern

$$\beta = b/m_1, \quad \gamma_i = c_i/m_i, \quad \mu_i = m_i/m_{i-1} \quad (9)$$

liefert der Koeffizientenvergleich in den charakteristischen Parametern folgendes nichtlineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 + (1 + \mu_3) \gamma_1 \gamma_3 + [1 + \mu_2(1 + \mu_3)] \gamma_2 \gamma_3 &= \hat{a}_2, & \beta &= \hat{a}_5, \\ \gamma_1 + (1 + \mu_2) \gamma_2 + (1 + \mu_3) \gamma_3 &= \hat{a}_4, & \beta \gamma_2 \gamma_3 &= \hat{a}_1, & \beta[\gamma_2 + (1 + \mu_3) \gamma_3] &= \hat{a}_3, & \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 &= \hat{a}_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

mit den berechneten Werten $\hat{a}_i = \hat{T}_i^6 / \hat{T}_0^6$ ($i = 0, 1, \dots, 5$). Aus (10) kann man die ersten physikalischen Parameter sofort berechnen:

$$\beta = \hat{a}_5, \quad \gamma_1 = \hat{a}_0 \hat{a}_5 / \hat{a}_1, \quad \gamma_2 \gamma_3 = \hat{a}_1 / \hat{a}_5. \quad (11)$$

Setzt man diese linearen Lösungen ein, so ergibt sich eindeutig

$$\gamma_2 = \frac{\hat{a}_1}{\hat{a}_5} \frac{\hat{a}_3^2 + \hat{a}_2 \hat{a}_5^2 - \hat{a}_1 \hat{a}_5 - \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_5}{\hat{a}_0 \hat{a}_5^2 + \hat{a}_1 \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_4 \hat{a}_5} \quad (12)$$

und damit auch die Werte für γ_3 , μ_2 und μ_3 . Die zugehörigen numerischen Ergebnisse sind alle positiv.

Bei den Beispielen mit zwei oder drei Freiheitsgraden gibt es nur eine begrenzte Anzahl von Variationen solcher zeitinvarianter mechanischer Systeme z. B. durch weitere Dämpfungen, gleiche oder parallel geschaltete Massen etc. Daran kann man zeigen, daß nur die gewählte Form eine optimale mechanische Struktur in dem Sinne besitzt, daß eine lineare Umrechnung zu positiven physikalischen Parametern möglich ist. Eine Fortsetzung auf n Massen dieser eindimensionalen Schwingerkette scheint auch dem physikalischen Wellenausbreitungscharakter des vorgegebenen Meßsignals (1) am besten zu entsprechen.

Literatur

- 1 KLOTTER, K., Technische Schwingungslehre, Teil A, Springer-Verlag, New York 1978, S. 363–412.
- 2 BRAUN, H., Spektrale Dichte von Fahrbahnunebenheiten, Akustik und Schwingungstechnik, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1970.
- 3 BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A., Taschenbuch der Mathematik, (Ergänzende Kapitel, 2. Aufl.), H. Deutsch-Verlag, Frankfurt, 1981, S. 10.
- 4 ATANACKOVIC, T. A.; ACHENBACH, M., A least square solution and error estimate for some vibration problems, ZAMM 65 (1985) 1, 57–59.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. W. WEDIG, L. Werthmannstraße 1, D-7505 Ettlingen 1, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 109 – T 112

WELTIN, U.; KELKEL, K.

Aktive Lagerung eines starren Rotors mit Parameterunsicherheiten

Zur Stabilisierung von Rotorsystemen mit Magnetlagern existieren Reglerentwürfe, die einen festen Betriebszustand optimal stabilisieren [1]. Die Parameter eines realen Systems (hier z. B. Steifigkeit, Massenverteilung, Unwucht) können normalerweise nicht exakt angegeben werden. Eine Regelung, die dem nicht Rechnung trägt, ist im allgemeinen nicht mehr optimal und kann sogar zu Instabilitäten führen.

In dieser Arbeit wird für ein einfaches Rotormodell ein Entwurfsverfahren [2] verwendet, welches mit alleiniger Kenntnis von Schranken für die Parameterunsicherheiten asymptotische Stabilität des erwünschten Betriebszustandes sichert.

Der Rotor (siehe Abb. 1) dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω . Die Auslenkung der Wellenachse wird durch die Kardanwinkel α und β beschrieben. Als nominale Parameter werden hier Trägheitsradien und ein Frequenzmaß für die Lagersteifigkeit, d. h.

$$l_r^2 = b^2 + \frac{J_3 + J_2}{2m}, \quad r^2 = \frac{J_1}{m}, \quad \omega_m^2 = \frac{c_y + c_z}{2m} \left(\frac{l}{l_r} \right)^2 \quad (1)$$

und als Parameterunsicherheiten

$$\mu = \frac{J_3 - J_2}{2ml_r^2}, \quad \chi = \frac{c_z - c_y}{2m\omega_m^2} \left(\frac{l}{l_r} \right)^2, \quad \varepsilon = \frac{be}{l_r^2} \quad (2)$$

für die Rotorunsymmetrie, die Lagerunsymmetrie und die Unwucht eingeführt. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}(t)) \mathbf{x} + (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(t)) \mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{v}(t), \quad (3)$$

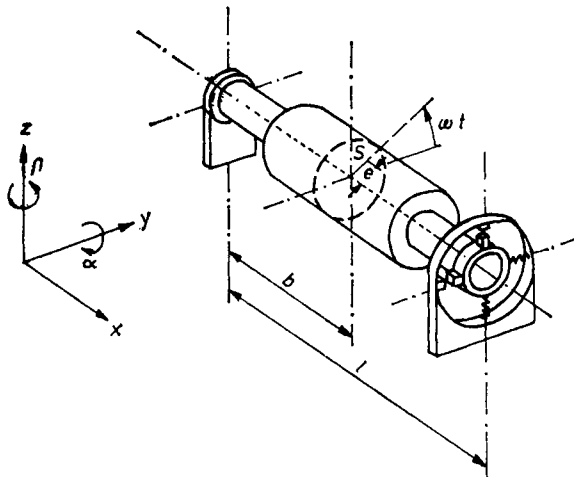


Abb. 1. Rotormodell

mit

$$A_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -\omega \frac{r^2}{l_r^2} & -\omega_m & 0 \\ \omega \frac{r^2}{l_r^2} & 0 & 0 & -\omega_m \\ \hline \omega_m & 0 & & \\ 0 & \omega_m & & \end{array} \right], \quad A(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{14}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right],$$

z. B.: $a_{24}(t) = \omega_m(\chi + \mu(1 - \chi) \cos 2\omega t)$,

$$B_0 = \left[\begin{array}{cc} \omega_m & 0 \\ 0 & \omega_m \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right], \quad B(t) = \mu \omega_m \left[\begin{array}{cc} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right], \quad u(t) = \frac{l}{m l_r^2 \omega_m^2} \begin{bmatrix} -F_z(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$H = \left[\begin{array}{cc} \omega_m & 0 \\ 0 & \omega_m \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right], \quad v(t) = \varepsilon \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \begin{bmatrix} -(1 - \mu) \sin \omega t \\ (1 - \mu) \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \omega_m \\ \dot{\beta} \\ \omega_m \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Dabei bezeichnen A_0 die Matrix des ungestörten Systems (schiefsymmetrisch infolge geeigneter Koordinatenwahl) und $A(t)$ die Matrix der Störungen infolge der Parameterunsicherheiten. Die von dem Magnetlager aufgebrachten Kräfte sind in u enthalten. Die Rotorunsymmetrie führt bei der Steuermatrix $B(t)$ zu periodisch zeitveränderlichen Größen. Der Störvektor $v(t)$ wird durch die Unwucht des Rotors bestimmt.

Wir suchen eine Regelung $u(x)$ so, daß die Lösung $x = 0$ des Systems (3) asymptotisch stabil ist. Es wird vorausgesetzt, daß der Zustand des Systems zu jedem Zeitpunkt bekannt ist. Der Entwurf der Regelung erfolgt in zwei Schritten: zuerst wird für das System ohne Parameterunsicherheiten eine lineare Regelung angegeben. Das so geregelte System wird als nominales System bezeichnet. Es zeigt sich, daß die lineare Regelung alleine nicht in der Lage ist, das vollständige System zu stabilisieren. Dies kann aber durch einen nichtlinearen Regleranteil, der auf die Parameterunsicherheiten abgestimmt wird, erreicht werden. Das Regelgesetz läßt sich damit angeben zu

$$u(x) = -Kx + u_n(x).$$

Für den linearen Regleranteil wird ein oft zitiertes Entwurfsverfahren verwendet [5]. Unter der Voraussetzung, daß das Matrizenpaar (A_0, B_0) vollständig steuerbar ist, erhält man eine lineare Rückführung, die das Kostenfunktional

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T (Q_R + K^T K) x \, dt \quad \text{mit} \quad Kx = B_0^T P_R x, \quad P_R = P_R^T > 0 \quad (6)$$

minimiert. P_R ist dabei die eindeutige Lösungsmatrix der Matrix-Riccatigleichung

$$A_0^T P_R + P_R A_0 - P_R B_0 B_0^T P_R + Q_R = 0; \quad Q_R = Q_R^T \geq 0. \quad (7)$$

Für das hier behandelte Beispiel erhalten wir zur Bestimmung der Elemente von P_R ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem der Ordnung 10. Die Lösung dieses Gleichungssystems wird normalerweise numerisch ermittelt.

Bewertet man mit der Matrix Q_R nur die zeitliche Änderung der Kardanwinkel, so erhält man eine lineare Rückführung, die sich im Hinblick auf die mechanische Struktur des Systems als vollständige Dämpfung interpretieren läßt, d. h. aus

$$Q_R = d^2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad \text{folgt} \quad Kx = d \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \omega_m \\ \dot{\beta} \\ \omega_m \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Man kann zeigen, daß die Matrix des nominalen Systems

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{K} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*\top}), \quad -\mathbf{B}_0 \mathbf{K} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*\top}) \quad (9)$$

nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat [3].

Für den Entwurf des nichtlinearen Regleranteils gehen wir von den Gleichungen des vollständigen Systems mit linearer Rückführung

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^* + \mathbf{A}(t)) \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_n + \mathbf{B}(t) (-\mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{u}_n) + \mathbf{H} \mathbf{v}(t) \quad (10)$$

aus. Diese Bewegungsgleichungen lassen sich auch in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 (\mathbf{u}_n + \boldsymbol{\varphi}) \quad (11)$$

darstellen. Dabei werden alle Störungen infolge der Parameterunsicherheiten in der Vektorfunktion

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{D}(t) \mathbf{x} + \mathbf{E}(t) (-\mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{u}_n) + \mathbf{F} \mathbf{v}(t) \quad (12)$$

zusammengefaßt, was möglich ist, da die Anpassungsbedingungen

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{B}_0 \mathbf{D}(t), \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \mathbf{E}(t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}_0 \mathbf{F} \quad (13)$$

erfüllt sind. Der nichtlineare Regleranteil

$$\mathbf{u}_n = \frac{-\mathbf{B}_0^T \mathbf{P}_L \mathbf{x}}{|\mathbf{B}_0^T \mathbf{P}_L \mathbf{x}|} \varrho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{P}_L = \mathbf{P}_L^T > 0 \quad \text{aus} \quad \mathbf{P}_L \mathbf{A}^* + \mathbf{A}^{*\top} \mathbf{P}_L + \mathbf{Q}_L = \mathbf{0}, \quad \varrho(\mathbf{x}) = \max_t |\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)| \quad (14)$$

läßt sich hier als Kraft deuten, die die Störung infolge der Parameterunsicherheiten kompensiert [6]. Den Betrag dieser Kraft erhält man aus der zeitmaximierten Störung. Die Elemente der Matrix \mathbf{P}_L lassen sich aus einem gewöhnlichen linearen Gleichungssystem der Ordnung 10 berechnen. Hier wird die Matrix \mathbf{Q}_L proportional (Konstante q) der Einheitsmatrix gewählt. Die Richtung der Kraft erhält man dann aus

$$\mathbf{B}_0^T \mathbf{P}_L \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{q}{\delta} \dot{\alpha} + \frac{q}{2} \left[\alpha + \beta \frac{\omega}{\delta} \left(\frac{r}{l_r} \right)^2 \right] \\ \frac{q}{\delta} \dot{\beta} + \frac{q}{2} \left[\beta - \alpha \frac{\omega}{\delta} \left(\frac{r}{l_r} \right)^2 \right] \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Die Abschätzung für den Betrag der Kraft führt in diesem Beispiel auf

$$\varrho(\mathbf{x}) > \frac{|\chi| + 2|\mu|(1+|\chi|)}{1-2|\mu|} (|\alpha| + |\beta|) + 2|\mu| \frac{\frac{\omega}{\omega_m} \left| \left(\frac{r}{l_r} \right)^2 - 2 \right| + \frac{\delta}{\omega_m} \left(\left| \frac{\dot{\alpha}}{\omega_m} \right| - \left| \frac{\dot{\beta}}{\omega_m} \right| \right)}{1-2|\mu|} + 2|\varepsilon| \frac{1-\mu}{1-2|\mu|} \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2. \quad (16)$$

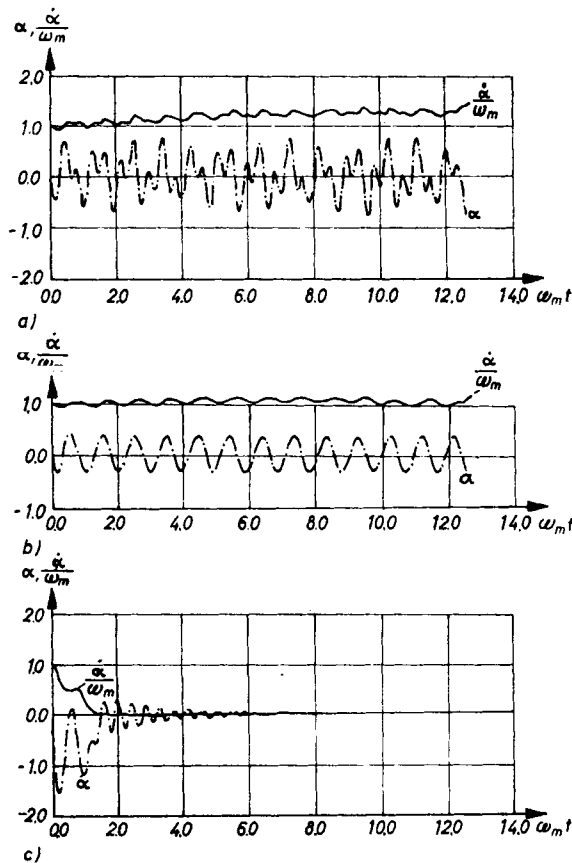


Abb. 2. Systemantwort: a) System ohne Rückführung, b) System mit linearer Rückführung, c) System mit vollständiger Rückführung. — In allen drei Zeichnungen müssen bei den Beschriftungen der Kurven $\frac{\alpha}{\omega_m}$ und α ausgetauscht werden.

Bild 2 zeigt die Systemantwort eines im instabilen Drehzahlbereich betriebenen, unsymmetrischen, walzenförmigen Rotors mit Unwucht und Lagerungssymmetrien mit

$$\omega_m = \frac{1}{s}; \quad \frac{r^2}{l_r^2} = 1,5; \quad \omega = 6,5\omega_m; \quad \chi = 0,2; \quad \varepsilon = 0,01; \quad \mu = 0,1. \quad (17)$$

Das freie System zeigt einen in der Zeit deutlich ansteigenden Verlauf der Wellenauslenkung α . Diese Instabilität läßt sich mit der gewählten linearen Regelung nicht beseitigen. Mit der vollständigen Regelung wird bereits nach kurzer Zeit der Nullzustand erreicht.

Literatur

- 1 ULBRICH, H., Entwurf und Realisierung einer berührungsfreien Magnetlagerung für ein Rotorsystem, Dissertation TU München 1979.
- 2 BREINL, W.; LEITMANN, G., Zustandsrückführung für dynamische Systeme mit Parameterunsicherheiten, Regelungstechnik **31**, (1983), 95–103.
- 3 MÜLLER, P. C., Stabilität und Matrizen, Berlin-Heidelberg-New York 1977.
- 4 MEIROVITCH, L.; RYLAND, G., Response of slightly damped gyroscopic systems, J. Sound Vibration **67** (1979) 1, 1–19.
- 5 BRYSON, E. A.; HO, Y. C., Applied Optimal Control, Ginn and Company, Waltham, Mass. 1969.
- 6 LEITMANN, G., On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems. ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control **103**, (1981) 85–102.

Anschrift: Dr.-Ing. KLAUS KELKEL, Dipl.-Ing. UWE WELTIN, Institut für Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt, Hochschulstraße 1, D-6100 Darmstadt, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 112 – T 114

ZASTRAU, B.

Zur Anwendung von Kontaktelementen für die Berechnung des Schwingungsverhaltens gerissener Balken

Das dynamische Verhalten gerissener Strukturen, wie es etwa bei Stahlbeton vorliegt, ist auch im Gebrauchszustand nichtlinear. Der Gebrauchszustand soll dadurch gekennzeichnet sein, daß zwar in Abhängigkeit der Lastamplitude einzelne Risse geöffnet sind, aber keine fortschreitende Schädigung eintritt. Will man die Schwingungsantwort und das Übertragungsverhalten aufgrund einer Erregerkraft mit harmonischer Zeitfunktion bestimmen, so ist man wegen der Nichtlinearität auf numerische Methoden mit Zeitschrittintegration angewiesen.

In der vorliegenden Arbeit soll an einer stark vereinfachten Problemstellung gezeigt werden, wie im Rahmen der Finite Element Methode (FEM) mit Anwendung der Newmarkintegration die Einführung von Kontaktelementen zum Erfolg führt. Bild 1a stellt exemplarisch einen Strukturausschnitt mit geöffnetem Riß und das verwendete Kontaktelement dar. Im Verlauf der Berechnung sind zwei Zustände zu unterscheiden, nämlich

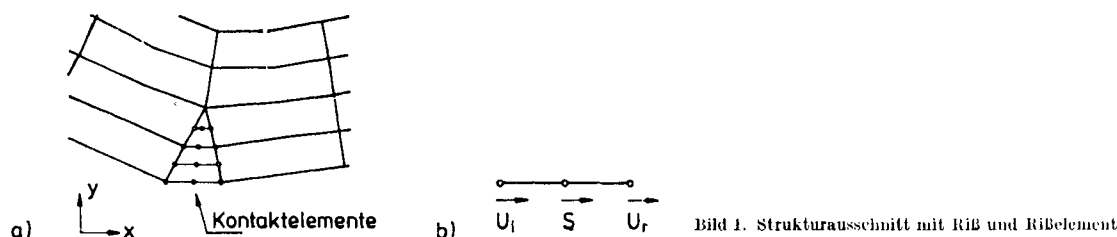


Bild 1. Strukturausschnitt mit Riß und Rißelement

a) geöffneten Riß mit freier Verformbarkeit von linkem und rechtem Rißknoten und kräftefreier Rißoberfläche und

b) geschlossenen Riß mit gleicher Verformung der Rißknoten und einer Druckkontaktkraft zwischen dem Knoten l und r .

Führt man das in Bild 1b dargestellte gemischte Element mit einer dem Mittelknoten zugeordneten Kontaktkraft S_c ein, so lassen sich bei Beachtung der Elementorientierung die aufgeführten Bedingungen wie folgt schreiben:

$$\text{a) } S_c = 0, \quad U_l \leq (x_r - x_l) + U_r = \delta + U_r; \quad \text{b) } S \geq 0, \quad U_l = U_r \quad (1 \text{ a, b}); (2 \text{ a, b})$$

Hierin bezeichnen x die Koordinaten und U die Verschiebung der Knoten, δ ist die ursprüngliche Spaltbreite am Riß. Mit den für beide Rißknoten formulierten Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_{i=1}^n S_{it} + S_e + R_t = 0, \quad \sum_{i=1}^n S_{ir} - S_e + R_r = 0, \quad (3a, b)$$

worin S_i und R die Schnittkraft- und Knotenkraftvektoren sind, lassen sich die Gleichungen 1 mit folgenden Matrizen darstellen

$$H_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4a, b)$$

Mit diesen Hilfsmatrizen lauten die Elementmatrizen für Steifigkeit, Rayleighdämpfung und Masse

$$k = k^* H, \quad c = (\alpha k^* + \beta m^*) H, \quad m = m^* H, \quad (5a, b, c)$$

wobei die Wahl der Faktoren k^* und m^* beliebig ist und je nach Rißöffnungszustand H_e für Kontakt oder H_{nc} für den offenen Riß zu wählen ist. Dabei lassen sich im übrigen auch die bei dynamischem Kontakt vorhandenen zusätzlichen Beziehungen

$$\dot{U}_l = \dot{U}_r, \quad \ddot{U}_l = \ddot{U}_r, \quad (6a, b)$$

realisieren. Erste Hinweise zu dieser Art der Rißbetrachtung lassen sich bei HUGHES, et al. [1] finden.

Zur numerischen Berechnung gehören ferner Kriterien, um ein Öffnen bzw. Schließen des Risses festzustellen sowie Fortsetzungsbeziehungen. Eine Veränderung der Rißkonfiguration tritt genau dann ein, wenn die in (1) angegebenen Ungleichungen verletzt sind, wobei es durchaus möglich ist, Adhäsionskräfte zu berücksichtigen.

Numerische Untersuchungen haben gezeigt, daß im Rahmen kleiner Integrationszeitschritte beim Öffnen lediglich eine Korrektur der Systemmatrizen vorzunehmen ist, d. h. ein Wechsel von H_e nach H_{nc} , daß aber die Anfangsbedingungen der Verschiebung $+U$, $+\dot{U}$ und $+\ddot{U}$ nach dem Öffnen identisch zu $-U$, $-\dot{U}$ und $-\ddot{U}$ gewählt werden können, ohne daß eine der Systemänderung Rechnung tragende Gleichgewichtsiteration notwendig wird. Für den Übergang von geöffnetem zu geschlossenem Riß werden allerdings zusätzliche Annahmen erforderlich. Dies sind Rauigkeit der Rißoberfläche, Kleinheit des Zeitintervalls und eine Elementgröße dergestalt, daß fortlaufende Wellenfronten während eines Zeitintervalls die Nachbarknoten nicht erreichen. Dann kann für die am Schließen beteiligten Knoten die Newtonsche Stoßhypothese mit $e = 0$ eingeführt werden, und aus dem Impulserhaltungssatz in Richtung des Kontakt-elementes errechnet sich die den beiden Rißufern nach dem Stoß gemeinsame Geschwindigkeit \dot{U}_{lr} aus

$$-M\dot{U} - +M\dot{U} = 0 \quad (7)$$

zu

$$+\dot{U}_{lr} = \frac{-\dot{U}_l \tilde{m}_l + -\dot{U}_r \tilde{m}_r}{\tilde{m}_l + \tilde{m}_r}. \quad (8)$$

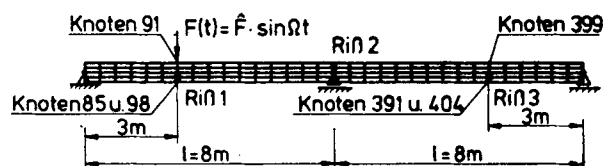
Die Abkürzungen

$$\tilde{m}_l = \sum_{i=1}^n m_{li}; \quad \tilde{m}_r = \sum_{i=1}^n m_{ri} \quad (9a, b)$$

sind durch die Wahl einer konsistenten Massenmatrix begründet und nicht auf Wellenausbreitung zurückzuführen. Die Annahme der Stetigkeit von inneren und äußeren Kräften führt zu einer gleichlautenden Beziehung für die Beschleunigung

$$+\ddot{U}_{lr} = \frac{-\ddot{U}_l \tilde{m}_l + -\ddot{U}_r \tilde{m}_r}{\tilde{m}_l + \tilde{m}_r}. \quad (10)$$

Modell eines Zweifeldträgers



$$\begin{aligned} b &= 0,4 \text{ m} & h &= 0,6 \text{ m} \\ E &= 3,4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 & \rho &= 2500 \text{ kg/m}^3 \\ \hat{F} &= 1,8 \text{ kN} & \Omega &= 10/\text{s} \end{aligned}$$

4 × 32 8 - Knotenelemente
3 × 4 Kontaktelemente

Massenmatrix konsistent

Bild 2a. Balkenelement mit Rissen

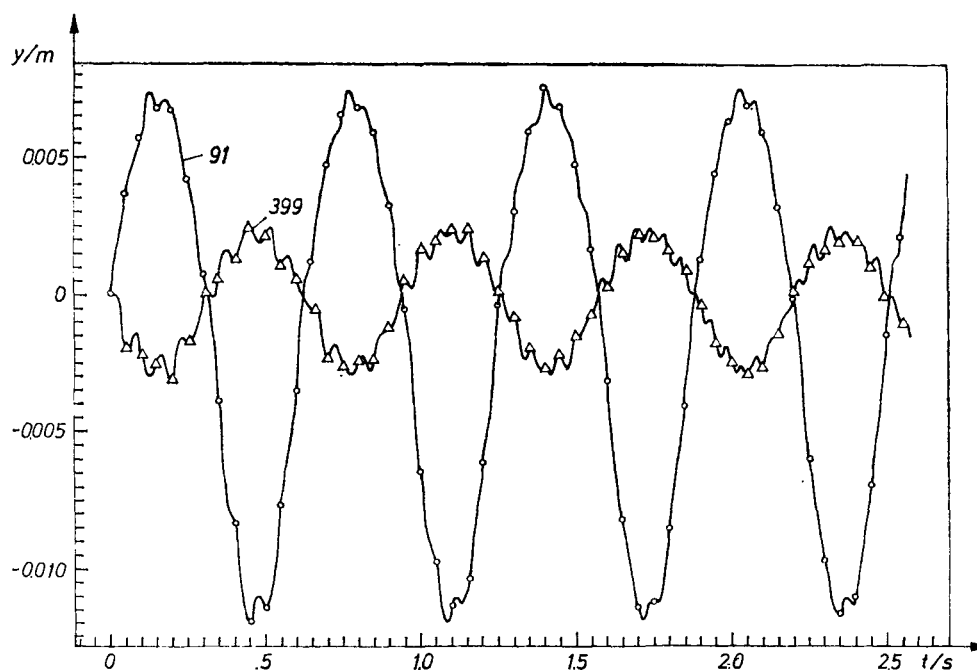


Bild 2 b. Zeitverlauf der Bewegung zweier Knoten beim Balkenelement mit Rissen

Da i. a. das Schließen der Risse erst nach einem Durchdringen der Rißufer festgestellt werden kann, müßte ohne Vorhandensein von Erhaltungssätzen für die Verschiebung der Stoßzeitpunkt iteriert werden und danach die Integration fortgesetzt werden. Dies ist im Rahmen der angestrebten Untersuchungen bei weitem zu rechenzeitaufwendig und konnte, durch eine Vielzahl von Beispielrechnungen bestätigt, durch folgende massengewichtete Schätzung ersetzt werden:

$$+\Delta U_{l/r} = \frac{-\Delta U_l \tilde{m}_l + -\Delta U_r \tilde{m}_r}{\tilde{m}_l + \tilde{m}_r}, \quad (11)$$

in der ΔU das Verschiebungsinkrement des letzten Zeitschritts bezeichnet.

Zum Nachweis der Verwendbarkeit des vorgestellten Verfahrens seien die Ergebnisse eines Musterbeispiels in Bild 2a, b wiedergegeben. Die vorgelegten Ergebnisse zeigen, daß das eingeführte Kontaktelement mit dem in aller Kürze vorgestellten Algorithmus auch Probleme mit vielen Freiheitsgraden und einer Mehrzahl von Rissen behandeln läßt. Für weitere Ergebnisse und die Anwendung auf Drehfreiheitsgrade muß auf andere Publikationen des Autors verwiesen werden.

Literatur

- 1 HUGHES, T. R.; TAYLOR, R. L.; SACKMAN, J. L.; CURNIER, A.; KANOKNUKULCHAI, W., A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1976), 249–276.
- 2 ZASTRAU, B., A Strategy for Calculating Nonlinear Oscillations of Partially Cracked Structures. Proc. 8th Intl. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Brüssel, Belgien, 1985, Paper B5/5.

Anschrift: Dr.-Ing. BERND ZASTRAU, Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, Holstenhofweg 85, D-2000 Hamburg 70, BRD

ZHANG, B.; ZIEGLER, F.

Ein Randintegralgleichungsverfahren für die Schwingungen einer elastischen Säule in einem Flüssigkeitsbehälter

In der Arbeit von LIAW und CHOPRA [1] wird der hydrodynamische Druck auf eine zylindrische Säule, die sich in einer unendlichen Flüssigkeit befindet, mit Hilfe von Besselfunktionen exakt berechnet. Wir erweitern diese Arbeit auf eine Säule in einer endlichen Flüssigkeit, die von einem starren Behälter umfaßt wird, wenn sie zeitlich harmonisch wegerregt wird.

1. Harmonische Schwingung der Säulenkonstruktion

Unter Berücksichtigung der horizontalen harmonischen Wegerregung wird die Säule anhand der Balkentheorie beschrieben und als ein ebenes Schwingungsproblem gelöst (ZIEGLER [2]). Die linear elastische Säule wird vereinfachend als masselos angenommen. Der Einmasseschwinger besitzt zwei Freiheitsgrade: Verschiebung und Drehung der Endmasse (Abb. 1a). Die Schwingungsgleichung ist aus [2]:

$$[M] \{\ddot{Y}\} + [C] \{\dot{Y}\} + [K] \{Y\} = \{P_e\}. \quad (1)$$

Die Deformation wird durch die Linearkombination der Eigenformen dargestellt [2]:

$$\{Y\} = [\Phi] \{T\}, \quad \{\dot{Y}\} = i\nu[\Phi] \{T\}, \quad \{\ddot{Y}\} = -\nu^2[\Phi] \{T\}. \quad (2)$$

Damit erhält man die Schwingungsgleichung der gedämpften, aber nicht hydrodynamisch belasteten Säule zeitlich reduziert zu

$$(-\nu^2[M] + i\nu[C] + [K])[\Phi] \{T\} = \{P_e\}. \quad (3)$$

2. Hydrodynamische Belastung

Die Säule ist in eine Flüssigkeit getaucht in einem beliebig geformten Becken. Die Flüssigkeit ist linear kompressibel und reibungsfrei vorausgesetzt. Dem hydrodynamischen Druck bei harmonischer Erregung entspricht dann die Helmholtz-Gleichung:

$$\Delta_3 P + k^2 P = 0, \quad k = \nu/c, \quad (4)$$

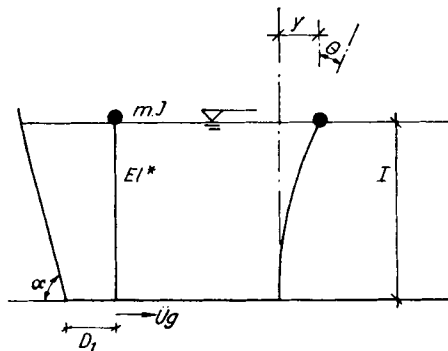


Abb. 1a. Säule im Behälter

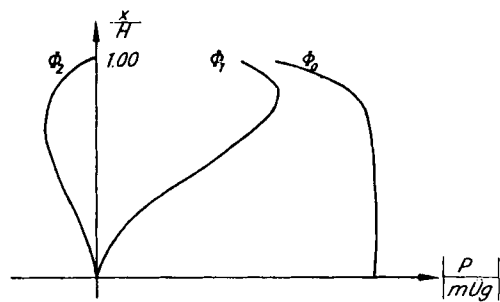


Abb. 1b. Die modalen Druckfunktionen

wobei k die Wellenzahl und c die Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit ist. Die hydrodynamische Belastung an der Säule in radialer Richtung ist durch ihre Lösung unter Berücksichtigung der folgenden Randbedingungen zu bestimmen:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad \text{am fixen Rand } \Gamma_1, \quad \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_f \ddot{U}_t \cos \gamma \quad \text{am schwingenden Rand } \Gamma_2, \quad (5)$$

$$P = 0 \quad \text{an der freien Oberfläche } \Gamma_3.$$

Die oben bezeichneten Randbedingungen stellen den Zusammenhang zwischen dem hydrodynamischen Druck und der Verschiebung des Flüssigkeitskörpers dar. Mit Hilfe der Greenschen Funktion führt die Helmholtz-Gleichung zu einer Randintegralgleichung [3]:

$$\frac{1}{2} P = \int_{\Gamma} \left[G(\mathbf{r}) \frac{\partial P}{\partial n} - P \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial n} \right] d\Gamma \quad (6)$$

wobei $|\mathbf{r}|$ den Abstand vom Quellpunkt zum Bildpunkt bezeichnet. Wir wählen den Realteil der Greenschen Funktion für die radial ausstrahlenden Wellen aus:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\cos(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} - \frac{\cos(k|\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}'|} \right), \quad (7)$$

damit ist die Randbedingung an der freien Oberfläche erfüllt. Die Integralgleichung ist jetzt nur mehr auf $\Gamma_1 + \Gamma_2$ auszuwerten. $|\mathbf{r}'|$ entspricht dem Abstand vom Quellpunkt zum Punkt, der zum Bildpunkt an der Oberfläche gespiegelt ist. Der gesamte Rand ist in N Elemente zerlegt. Annähernd ist der Druck in jedem Element konstant angenommen und zwar gleich dem Mittelpunktswert. Daher erhält man statt der Integralgleichung das lineare Gleichungssystem mit vollbesetzter Koeffizientenmatrix:

$$[Z] \{P\} = \{Q\}, \quad Z_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma, & i = j, \\ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma, & i \neq j, \end{cases} \quad Q_i = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_j \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma. \quad (8)$$

3. Säule-Flüssigkeitsinteraktion

Jetzt kann die für jedes Teilsystem berechnete Antwortfunktion zur totalen zusammengesetzt werden, und man erhält für das Interaktionsproblem des harmonisch erregten Systems durch Synthese folgende Gleichung:

$$(-v^2[M] + iv[C] + [K] + v^2[P_i]) [\Phi] \{T\} = \{P_e\} + \{P_f\}, \quad (9)$$

$$P_{fi} = \int_0^H [L_i(x) \int_0^{2\pi} P_f(R, \gamma, x) R \cos \gamma d\gamma] dx = \sum_j [\sum_m P_f(R, \gamma_m, x_j) R \cos \gamma_m \Delta \gamma_m] L_i(x_j) \Delta x_j,$$

wobei $\{P_f\}$ und $[P_i]$ die generalisierten effektiven Belastungen sind, die durch Starrkörperverschiebung bzw. Verformung entsprechend der Schwingungsmodus der Säule verursacht werden, $L_i(x)$ ist i -te Eigenform des Balkens. Wir multiplizieren mit $[\Phi]^T$ von links, beachten die Orthogonalität der Eigenvektoren und erhalten:

$$[U] \{T\} = \{V\}, \quad U_{ij} = \begin{cases} \omega_i^2 + 2i\omega_i v \xi_i - v^2 \left[1 - \frac{P_{ij}^*}{M_i^*} \right], & i = j \\ v^2 \frac{P_{ij}^*}{M_i^*}, & i \neq j \end{cases}, \quad (10)$$

$$V_i = \frac{P_{ei}^* + P_{fi}^*}{M_i^*}, \quad M_i^* = \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\}, \quad [P_i^*] = [\Phi]^T [P_i] [\Phi],$$

$$\{P_e^*\} = [\Phi]^T \{P_e\}, \quad \{P_f^*\} = [\Phi]^T \{P_f\}$$

4. Numerische Ergebnisse

Die Integration der Greenschen Funktion und ihrer Ableitung sind hier nach drei verschiedenen Arten auszurechnen. Die Elemente, deren Distanzen zwischen Quellelement und Bildelement groß sind, werden als konstante Elemente behandelt. Die entsprechende Integration lautet:

$$\int_{\Gamma_j} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) \Gamma_j, \quad \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma = \frac{\partial G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)}{\partial n} \Gamma_j, \quad (11)$$

wobei $|\mathbf{r}_0|$ die Distanz zwischen den Elementmittelpunkten ist. Benachbarte Elemente, hingegen, lassen sich durch ein annäherndes Integrationsverfahren lösen. Hier sind jene rechteckigen Elemente mit 4 Punkten und dreieckige Elemente mit 3 Punkten beschrieben. Die Integration ergibt dann:

$$\int_{\Gamma_j} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma = \Gamma_j \sum_i \eta_i G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i), \quad \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma = \Gamma_j \sum_i \eta_i \frac{\partial G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_i)}{\partial n}. \quad (12)$$

Das Singularitätsproblem wird exakt mit:

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial \left(\frac{\cos k|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} \right)}{\partial n} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial n} d\Gamma = \mathbf{0}, \quad \int_{\Gamma_j} \frac{\cos k|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} d\Gamma = \sum_m G_m, \quad (13)$$

$$G_m = \frac{(-1)^{m+1} m^{2m-1}}{\pi(2m-1)!} \left\{ d_1^{2m-1} \left[\frac{\sin \beta_0}{(2m-2) \cos^{2m-2} \beta_0} + \frac{2m-3}{2m-2} \int_0^{\beta_0} \frac{d\beta}{\cos^{2m-3} \beta} \right] + \right.$$

$$\left. + d_2^{2m-1} \left[\frac{\cos \beta_0}{(2m-2) \sin^{2m-2} \beta_0} + \frac{2m-3}{2m-2} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sin^{2m-3} \beta} \right] \right\}$$

für rechteckige Elemente gelöst. Der Flüssigkeitsdruck in den einzelnen Schwingungsformen wird in {Abb. 1 b} dargestellt. Die Existenz des Beckens beeinflusst die Flüssigkeitsdruckverteilung. Es erzeugt einen größeren hydrodynamischen Druck an der Säule. Je näher die Beckenwand zu der Säule liegt, umso größer ist ihre Wirkung {Abb. 2 a}. Das numerische Resultat zeigt, daß auch der Böschungswinkel den Druck stark beeinflusst. Der hydrodynamische Druck vermindert sich mit der Verkleinerung des Böschungswinkels {Abb. 2 b}. Die Genauigkeit des numerischen Verfahrens hängt stark von der Verteilung im Elementennetz ab. Bei geeignetem Elementennetz zeigt das Verfahren hohe Genauigkeit und rasche Konvergenz mit zunehmender Elementanzahl.

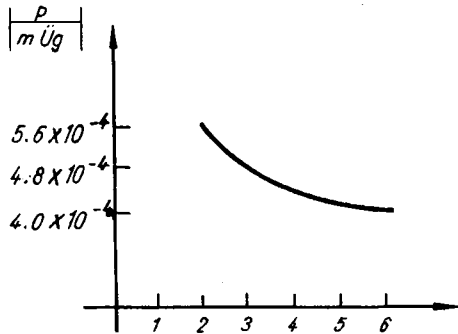


Abb. 2a. Hydrodynamischer Druck im Längspunkt $x = 0.7H$ — Auf der Abszisse D_1/R abgetragen.

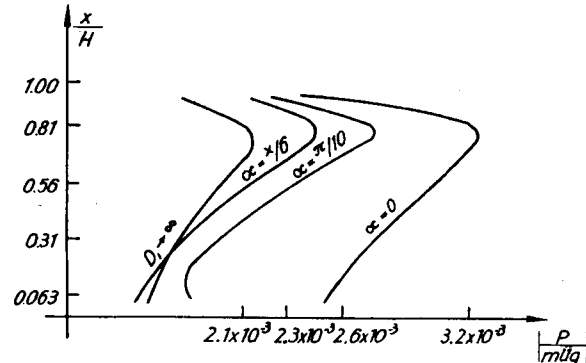


Abb. 2b. Die Druckverteilungen im Hinblick auf die Änderung des Böschungswinkels — Für $x/6$ lies $\pi/6$

5. Lösungsvergleich

Die Säule-Flüssigkeit-Konstruktion läßt sich bei einer einfachen Geometrie analytisch behandeln. Für ein konzentrisches Becken gibt es für die dreidimensionale Helmholtz-Gleichung eine analytische Lösung. Diese wird in die Dissertation von ZHANG aufgenommen.

Literatur

- 1 LIU, C. Y.; CHOPRA, A.-K., Dynamics of towers surrounded by water, Earthquake Engineering and Structural Dynamics **3** (1974), 33—39.
- 2 ZIEGLER, F., Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper, Springer-Verlag, Wien-New York, 1985.
- 3 HÖLLINGER, F., Bebenerrregte Schwingungen elastischer Sperrenkonstruktionen, Dissertation T.U. Wien 1982.
- 4 HÖLLINGER, F., Time-harmonic and nonstationary stochastic vibrations of arch dam-reservoir-systems, Acta Mechanica **49** (1983), 153—167.

Anschrift: Dipl. Ing. B. ZHANG, o. Prof. Dr. FRANZ ZIEGLER, Institut für allgemeine Mechanik, T.U. Wien, Karlsplatz 13, A-1040 Wien, Österreich

SECTION MECHANICS OF ELASTIC AND PLASTIC BODIES

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 118 – T 119

ABEN, H.; KELL, K.-J.

Integrated Photoelasticity as Tensor Field Tomography

In integrated photoelasticity polarized light is passed through the whole model and stresses are determined on the basis of the integral optical phenomena. Since the determination of the stresses is usually carried out by sections, integrated photoelasticity can be considered as a particular kind of optical tomography. However, while classical tomography deals only with scalar fields, in integrated photoelasticity one has to determine a tensor field (stress tensor or dielectric tensor).

Tensor field tomography is much more complicated than that of the scalar field due to several specific features (at every point of a tensor field one has six unknowns instead of one in the case of a scalar field, the effect of a point of a tensor field on the passing radiation depends on the direction of propagation of the latter, one has to use polarized radiation, etc.). Besides that, two principal questions arise: 1) what can be measured when polarized radiation is passed through a tensor field? 2) is the experimental information sufficient to determine a tensor field?

In the case of the scalar field tomography, the field is determined by the aid of the inverse Radon transform on the basis of line integrals through the field, measured experimentally [1]. In the case of a tensor field a line integral through the field does not have any physical meaning, in general.

If polarized light is passed through a three-dimensional photoelastic model, the light vector is transformed by a unitary unimodular matrix as follows [2]

$$\begin{pmatrix} E_{1*} \\ E_{2*} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_{10} \\ E_{20} \end{pmatrix} \quad (1)$$

where E_{j0} are the components of the incident light vector and E_{j*} are the components of the emergent light vector.

The most general expression for U is

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos \theta & e^{i\xi} \sin \theta \\ -e^{-i\xi} \sin \theta & e^{-i\xi} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

where the parameters ξ , ζ , and θ depend in a complicated way on the stress distribution along the light ray. If characteristic angles α_0 and α_* , and characteristic phase retardation 2γ are measured experimentally [2], we can calculate the parameters ξ , ζ and θ :

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\cos(\alpha_0 + \alpha_*)}{\cos(\alpha_0 - \alpha_*)} \operatorname{tg} \gamma, \quad \operatorname{tg} \zeta = \frac{\sin(\alpha_0 + \alpha_*)}{\sin(\alpha_0 - \alpha_*)} \operatorname{tg} \gamma, \quad (3), (4)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\cos \xi}{\cos \zeta} \operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_*) = \frac{\sin \xi}{\sin \zeta} \operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha_*). \quad (5)$$

Thus, on every light ray we get three relationships between the experimental data and parameters which characterize the stresses. However, to use these data for determining the stress distribution is very complicated. This problem has been solved only for a number of particular cases [2].

If the principal axes of the stress tensor are constant on a light ray, the matrix U can be diagonalized:

$$S(-\alpha_0) U S(\alpha_0) = G(\gamma) \quad (6)$$

where

$$S(\alpha_0) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad G(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}. \quad (7), (8)$$

In this case on every light ray two experimental values, α_0 and 2γ , can be recorded. Besides, now the integral Wernheim law holds:

$$\delta = \frac{2\gamma \cdot \lambda}{2\pi} = \delta_x - \delta_z = \int (n_x - n_z) dy. \quad (9)$$

Here λ is the wavelength, n_x and n_z are indices of refraction for light with vibrations along the x and z directions, accordingly, δ_x and δ_z are absolute optical retardations, and y is the direction of light propagation. One may also use the integral Favre law:

$$\delta_x = \int n_x dy, \quad \delta_z = \int n_z dy. \quad (10)$$

Let us consider the determination of stress in a plane of symmetry of an axisymmetric body. In this case the indices of refraction n_i can be expressed through stresses σ_i in cylindrical coordinates as follows:

$$n_r = n_0 + C_1 \sigma_r + C_2(\sigma_\theta + \sigma_z), \quad n_\theta = n_0 + C_1 \sigma_\theta + C_2(\sigma_z + \sigma_r), \quad n_z = n_0 + C_1 \sigma_z + C_2(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (11), (12), (13)$$

where C_1 and C_2 are optical constants. We also have

$$n_x = n_r \cos^2 \theta + n_\theta \sin^2 \theta, \quad (14)$$

where θ is the angle between radial coordinate and x -axis.

Measurement of the two absolute optical retardations δ_x and δ_z by scanning of the cross-section is not sufficient to determine the three unknown stresses σ_r , σ_θ and σ_z . However, a specific feature of the stress field tomography is that one has some additional information about the stress field equations of equilibrium and compatibility, boundary conditions, etc. In the case under consideration one has to use the compatibility equation, which can be written in the form

$$\frac{\partial}{\partial r} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] - (1 + \mu) \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (15)$$

Let us express the stress components σ_r , σ_θ , and σ_z as power series or as other functions of the radial coordinate r . These functions include three sets of unknown coefficients. Equation (15) permits to eliminate one set of the coefficients. Formulas (10) yield a system of linear equations to determine the other two sets of coefficients. Thus, the stress tensor field is determined.

It is interesting to point out that the dielectric tensor field cannot be determined in this way since one cannot use (15), and formulas (10) are not sufficient to determine the distribution of three components of the dielectric tensor.

References

- 1 HERMAN, G. T., Image Reconstruction from Projections, Academic Press, New York, 1980.
- 2 ABEN, H., Integrated Photoelasticity, McGraw-Hill Internat. Book Co., New York/London/Toronto, 1979.

Address: H. ABEN, K.-J. KELL, Institute of Cybernetics, Estonian Academy of Sciences, 200108 Tallinn, Akadeemia tee 21, USSR

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 119 – T 121

ANTES, H.

Komplementäre Berechnung Reissnerscher Platten mit Splinefunktionen

1. Einleitung, Problemstellung

Die Theorie der schubelastischen Platte nach E. REISSNER [1] ist aus mehreren Gründen, z. B. wegen der besseren Erfassung der Randbedingungen, befriedigender als die Kirchhoffsche Theorie, leider jedoch numerisch aufwendiger. Hier wird ein Vorschlag zur numerischen Ermittlung der geometrischen sowie der statischen Zustandsgrößen gemacht, der sich dadurch auszeichnet, daß wesentliche Randbedingungen relativ einfach exakt erfüllt werden können, und nach dem bereits wenige Ansatzfunktionen gute Ergebnisse liefern. Dabei werden B -Splinefunktionen mit mehrfachen Knoten am Plattenrand benützt, die die erwähnte einfache Verifizierung der wesentlichen Randbedingungen ermöglichen. Dieses Vorgehen war bei Kirchhoffschen Platten bereits sehr erfolgreich [2, 3, 4, 5].

Bekanntlich ist es möglich, an die Stelle der Lösung der Grundgleichungen, der Gleichgewichts- sowie der Verträglichkeits-Bedingungen nebst Randbedingungen, die Lösung eines Variationsproblems zu setzen, dessen Vergleichszustände nur eines der beiden Systeme von Differentialgleichungen erfüllen müssen. Für Zustände, die alle geometrischen Bedingungen erfüllen, ist dies das Variationsfunktional des Gesamtpotentials:

$$\begin{aligned} \Pi(\Phi_\alpha, w) = 0.5B \int_F \left[\Phi_{1,1}^2 + \Phi_{2,2}^2 + 2\nu\Phi_{1,1}\Phi_{2,2} + \frac{1-\nu}{2}(\Phi_{1,2} + \Phi_{2,1})^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2\{(w_{,1} + \Phi_1)^2 + \right. \\ \left. + (w_{,2} + \Phi_2)^2\} \right] dF - \int_{C_p} [\Phi_\alpha M_{\alpha\beta}^* + w Q_\beta^*] n_\beta ds - \int_F \left[w - \frac{\nu}{1-\nu} \lambda^{-2} \Phi_{\alpha,\alpha} \right] p^* dF. \quad (1) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen w bzw. Φ_α die Durchbiegung bzw. Rotationen und $M_{\alpha\beta}^*$, Q_β^* bzw. p^* gegebene Belastungen am Rand C_p bzw. auf die Plattenfläche F . $B = Eh^3/12(1-\nu^2)$ und $\lambda^2 = 10/h^2$ sind charakteristische Plattenkonstanten und h die Plattendicke.

Wie in [6] gezeigt wurde, besteht in der Reissnerschen Theorie vollständige Analogie der geometrischen Relationen zu zugeordneten statischen Beziehungen. Insbesondere sind den Verträglichkeitsbedingungen analoge

Beziehungen zwischen den „Spannungen“ $\bar{M}_{\alpha\beta}$, Q_α und Spannungsfunktionen ψ_α zugeordnet [6] ($e_{12} = -e_{21} = 1$, $e_{11} = e_{22} = 0$):

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = 0.5(e_{\alpha e}\psi_{\beta, e} + e_{\beta e}\psi_{\alpha, e}); \quad Q_\alpha = 0.5e_{\alpha e}\psi_{\gamma, \gamma e}. \quad (2)$$

Hierbei ist $\bar{M}_{\alpha\beta}$ der allein den Verkrümmungen $\kappa_{\alpha\beta} = 0.5(\Phi_{\alpha, \beta} + \Phi_{\beta, \alpha})$ zuzuordnende Anteil der Momente $M_{\alpha\beta}$:

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \lambda^{-2} p^* = B(1-\nu) \left[\kappa_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \kappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (3)$$

Mit diesen Spannungsfunktionen ψ_α und einer partikulären Lösung $M_{\alpha\beta}^p$, Q_α^p der inhomogenen Gleichgewichtsbedingungen [6] lautet das Variationsfunktional der komplementären Gesamtenergie bei homogenen geometrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Pi_C(\psi_\alpha) = \int_F \left\{ \frac{6}{Eh^3} \left[\psi_{1,2}^2 + \psi_{2,1}^2 + 2\nu\psi_{1,2}\psi_{2,1} + \frac{1+\nu}{2} (\psi_{2,2} - \psi_{1,1})^2 + (1+\nu) (\psi_{\alpha,\alpha 1}^2 + \psi_{\alpha,\alpha 2}^2)/2\lambda^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\psi_{1,2} + \nu\psi_{2,1}) M_{11}^p - 2(\psi_{2,1} + \nu\psi_{1,2}) M_{22}^p + 2(1+\nu) (\psi_{2,2} - \psi_{1,1}) M_{12}^p + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1+\nu) \lambda^{-2} (\psi_{\alpha,\alpha 2} Q_1^p - \psi_{\alpha,\alpha 1} Q_2^p) \right] + U_C(M_{\alpha\beta}^p, Q_\alpha^p) \right\} dF. \end{aligned} \quad (4)$$

Näherungsansätze für dieses Funktional haben gegebene statische Randbedingungen zu erfüllen.

2. Approximation mit B-Spline-Funktionen

Die Theorie der B-Splines kann hier nicht erläutert werden; diesbezüglich sei auf [7, 8] hingewiesen. Hier seien nur die Eigenschaften von B-Splines mit mehrfachen Randknoten angegeben, die sich bei der Anpassung von Ansätzen an Randbedingungen als vorteilhaft herausstellten. Für einen B-Spline $M_i(x) = M_n(x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$ der Ordnung n , ein Polynom vom Grad $n-1$, gilt im Fall $x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i-1+\alpha}$, $\alpha < n$ [9]:

- a) $M_i(x)$ ist bei $x = x_i$ aus $C^{n-\alpha-1}$
- b) $d^m M_i(x)/dx^m = 0$ in $x = x_i + \varepsilon$ für $m = 0(1) n - \alpha - 1$.

Mit einer Unterteilung des Plattengebiets durch einfache Knoten x_i bzw. y_j in $s \cdot t$ Elemente und mit Randknoten der Vielfachheit α erhält man eine zweidimensionale Splinefunktion aus den Produkten der linear unabhängigen B-Splines $M_i(x)$ und $M_j(y)$. Damit sind Ritzansätze für (1) bzw. (4) konstruierbar, z. B. ($N = s + n - 1$, $M = t + n - 1$)

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{1ij} M_i(x) M_j(y); \quad w(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{2ij} M_i(x) M_j(y). \end{aligned} \quad (5)$$

Die Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen kann, falls diese homogen sind, einfach durch Weglassen gewisser Rand-B-Splines erreicht werden. So ist z. B. für eine bei $y = 0$ eingespannte, sonst gelenkig gelagerte Rechteckplatte ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$)

$$\begin{aligned} \Phi_1^* = \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^{M-1} c_{1ij} M_i(x) M_j(y); \quad \Phi_2^* = \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^M c_{2ij} M_i(x) M_j(y) \\ w^* = \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^{M-1} c_{2ij} M_i(x) M_j(y); \end{aligned} \quad (6)$$

ein geometrisch zulässiger Ansatz für (1). Statisch zulässige Ansätze für (4) haben die statischen Randbedingungen zu erfüllen. Eine gelenkige Lagerung z. B. bei $y = b$ ergibt im Fall bikubischer Ansätze ($n = 4$) für ψ_α entsprechend (5) wegen

$$M_{22}(x, b) = 0 = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M d_{2ij} M_i(x) M_j(b) + p^* \frac{\nu}{1-\nu} \lambda^2 + M_{22}^p(x, b) \quad (7)$$

als zulässiger Ansatz — ψ_1 bleibt unbeeinflusst —

$$\psi_2^* = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} d_{2ij} M_i(x) M_j(y) + 0.25h_\nu \int_0^x \left[M_{22}^p(x, b) + p^* \frac{\nu}{1-\nu} \lambda^2 \right] dx M_M(y). \quad (8)$$

Die Variation des Funktionals (1) nach den Freiwerten c_{kl} liefert ein lineares Gleichungssystem mit der symmetrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} aus folgenden Teilmatrizen

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= B(1-\nu) \left[\frac{2}{1-\nu} \mathbf{B}_{ik}^x \mathbf{A}_{jl}^y + \mathbf{A}_{ik}^x \mathbf{B}_{jl}^y + \lambda^2 \mathbf{A}_{ik}^x \mathbf{A}_{jl}^y \right] / 2, \\ \mathbf{K}_{22} &= B(1-\nu) \left[\frac{2}{1-\nu} \mathbf{A}_{ik}^x \mathbf{B}_{jl}^y + \mathbf{B}_{ik}^x \mathbf{A}_{jl}^y + \lambda^2 \mathbf{A}_{ik}^x \mathbf{A}_{jl}^y \right] / 2 \\ \mathbf{K}_{12} &= B(1-\nu) \left[\mathbf{E}_{ki}^x \mathbf{E}_{jl}^y + \frac{2\nu}{1-\nu} \mathbf{E}_{ik}^x \mathbf{E}_{lj}^y \right] / 2; \quad \mathbf{K}_{13} = B(1-\nu) \lambda^2 \mathbf{E}_{ki}^x \mathbf{A}_{jl}^y / 2 \\ \mathbf{K}_{23} &= B(1-\nu) \lambda^2 \mathbf{A}_{ik}^x \mathbf{E}_{lj}^y / 2; \quad \mathbf{K}_{33} = B(1-\nu) \lambda^2 (\mathbf{B}_{ik}^x \mathbf{A}_{jl}^y + \mathbf{A}_{ik}^x \mathbf{B}_{jl}^y) / 2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Im Fall konstanter Flächenlast $p^* = p_0$ lautet die „rechte“ Seite

$$p_1 = -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda^{-2} p_0 (M_k(a) - M_k(0)); \quad p_2 = -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda^{-2} p_0 (M_1(b) - M_1(0)); \quad p_3 = p_0. \quad (10)$$

Das komplementäre Prinzip (4) führt zu dem symmetrischen System $F \cdot d = q$ mit den Blockmatrizen

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= \left[\frac{2}{1+\nu} A_{ik}^x B_{jl}^y + B_{ik}^x A_{jl}^y + \lambda^{-2} (B_{ik}^x B_{lj}^y + D_{ik}^x A_{jl}^y) \right] / 2B(1-\nu), \\ F_{22} &= \left[\frac{2}{1+\nu} B_{ik}^x A_{jl}^y + A_{ik}^x B_{jl}^y + \lambda^{-2} (B_{ik}^x B_{lj}^y + A_{ik}^x D_{jl}^y) \right] / 2B(1-\nu), \\ F_{12} &= \left[\frac{2\nu}{1+\nu} E_{ki}^x E_{jl}^y - E_{ik}^x E_{lj}^y + \lambda^{-2} (E_{ik}^x F_{lj}^y + F_{ik}^x E_{lj}^y) \right] / 2(1-\nu) B. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Submatrizen A , B und D sind wie in [2] definiert; zusätzlich ist

$$E_{ik}^x = \int M_i(x) M_k'(x) dx; \quad F_{ik}^x = \int M_i'(x) M_k'(x) dx. \quad (12)$$

Die „rechte“ Seite q ist abhängig von Φ_α^* und w^* , vor allem aber von $M_{\alpha\beta}^p$ und Q_α^p und kann hier nicht explizit angegeben werden.

3. Ergebnisse

Die Erprobung dieser komplementären Verfahren ergab bereits bei 4 mal 4 Elementen gute Resultate, z. B. (1) bei allseitig gelenkiger Lagerung und kubischen Splines aus 95 Gleichungen ($\nu = 0.3$, $b/a = 1$)

$$\begin{aligned} w_{\max} B / p_0 a^4 &= 0.00404 \text{ (0.00405 [10]) für } h/a = 0.01, \\ &= 0.00518 \text{ (0.00514 [10]) für } h/a = 0.25. \end{aligned}$$

Bei einer allseitig eingespannten Quadratplatte, bei der ja keine Randbedingungen an ψ_α^* gestellt werden, lieferte (4) am Rand ($x = a/2$, $y = 0$) fast den exakten Wert: $M_{22}^* = -0.0515 a^2 p_0$ für $h = 0.01a$ und $\nu = 0.3$.

Literatur

- 1 REISSNER, E., The effect of transverse deformation on the bending of elastic plates, J. appl. Mech. 12 (1945) A 69—A 77.
- 2 ANTES, H., Bicubic fundamental splines in plate bending, Int. J. Numer. Meth. Engg. 8 (1974) 503—511.
- 3 ANTES, H., Splinefunktionen bei der Plattenberechnung mittels Spannungsfunktionen, Wiss. Z. Hochsch. Arch. Bauw. Weimar 22 (1975) 135—137.
- 4 FUJII, F., Spline-Funktionen mit mehrfachen Knoten in der gemischten Plattenberechnung, Ing. Arch. 50 (1981) 365—375.
- 5 FUJII, F., Discrete and non-discrete mixed methods for plate bending analysis, Int. J. Numer. Meth. Engg. 17 (1981) 1843—1859.
- 6 ANTES, H., The stress functions of point loadings in Reissner's plate theory, Mech. Res. Comm. 11 (1984) 115—120.
- 7 DE BOOR, C., On calculating with B-Spline, J. Inst. Math. Appl. 10 (1972) 134—149.
- 8 BÖHMER, K., Spline-Funktionen-Theorie und Anwendungen, Teubner 1974.
- 9 ANTES, H., Plattenberechnung mit Fundamental-Splinefunktionen, ZAMM 54 (1974) T 182—T 183.
- 10 PRYOR, CH.; BARKER, R.; FREDERICK, D., Finite element bending analysis of Reissner plates, ASCE 96 (1970) 967—983.

Anschrift: Prof. Dr. rer. nat. H. ANTES, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstraße 150, D-4630 Bochum, BRD

Determination of the Stress-Strain State in Two-Fold Connected Plates

1. Introduction

Among the known methods of solving the stress-strain state in two-fold connected plates the most successful has proved to be the method of conformal mapping which enables a conformal one-one mapping of the domain of a plate on a circular annulus where the boundary conditions can be more easily fulfilled [4]. Using this method the aim of our short communication is to determine the stress-strain state for various cases of form and boundary conditions.

2. Basic equations

We deal with an ideally elastic, homogeneous and isotropic body whose stress state can be treated as a plane stress or plane strain state. The domain S which is created by the intersection of the body by the plane O_{xy} is bounded by the outer (L_1) and the inner (L_2) curve. The origin of the coordinates is set inside the curve L_2 . Now let

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{-m}^{m-1} C_k \zeta^k \quad (1)$$

be the function of the complex variable ζ which conformally maps the annulus $\varrho_1 \leq |\zeta| \leq 1$ from the plane (ζ) onto a given domain S in plane (z). Now let the domain of the annulus be denoted by Σ and the circles by which it is bounded by γ_1 (outer) and γ_2 (inner). We define function (1) by the method of A. G. UGODČIKOV, according to which the coefficients C_k are determined by the Lagrangean interpolation formula through m interpolation points on each boundary of the domain [4].

As it is known [2] the task to determine the stress state now transforms into the determination of two analytical functions $\varphi(\zeta)$ and $\psi(\zeta)$ on Σ fulfilling the following boundary conditions

$$\varphi(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_j(t), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

where

$$f_j(t) = \int (N_j + iT_j) \omega'(t) dt + C_j. \quad (3)$$

N_j is the normal and T_j the tangential stress on the boundary L_j , and C_j the additive constant.

Following the method of analytical continuation the boundary condition (2) takes the form [1]

$$\varphi(t) - \varphi(\varrho_1^2 t) + \Omega(t) \overline{\varphi'(t)} = F(t), \quad t \in \gamma_1, \quad (4)$$

where

$$\Omega(t) = \frac{\omega(t) - \omega(\varrho_1^2 t)}{\omega'(t)}, \quad F(t) = f_1(t) - f_2(\varrho_1^2 t) \quad (5), (6)$$

and the function $\psi(\zeta)$ is determined by the expression

$$\psi(\zeta) = \bar{f}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{L}{\zeta}\right) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \quad (7)$$

The unknown function $\varphi(t)$ is looked for in the form of a series

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n. \quad (8)$$

The functions $F(t)$ and $\Omega(t)$ are developed into the series

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n t^n; \quad \Omega(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_n t^{n-1}, \quad (9), (10)$$

where the coefficients D_n are obtained from the infinite system of equations

$$\sum_{k=n-m}^{n+m-1} (k-n) \bar{C}_{k-n} D_k = \begin{cases} (1 - \varrho_1^{2n}) C_n & n = -m, \dots, m-1 \\ 0 & \text{for other } n \end{cases}. \quad (11)$$

Now we introduce (8), (9) and (10) into (4). Multiplying the obtained expression by $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t^{n+1}}$ and integrating it in the closed way around γ_1 , we obtain

$$(1 - \varrho_1^{2n}) a_n + \sum_{-\infty}^{\infty} k D_{n+k} \bar{a}_k = A_n. \quad (12)$$

System (12) is an infinite system of linear algebraic equations which can be solved by the method of consecutive iterations. We take into account so many terms that the boundary condition on γ_2 becomes fulfilled with the prescribed accuracy. (The boundary condition on γ_1 is fulfilled automatically.) The function $\varphi(\zeta)$ thus being defined, we can by using (7) calculate $\psi(\zeta)$ as well as the stresses and displacements according to the known MUSHELISHVILI's equations [2].

3. Examples

By conformal mapping of a given domain we obtain a domain which is similar to the original one. As a consequence also the stresses correspond to an approximate domain. The mapping of domains which have sharp transitions of form on the outer boundary gives us strongly rounded domains if the number of interpolation points is small. This is, however, different to the domains having sharp transitions of form on the inner boundary. Inner sharp transitions can be extremely well mapped even at a small number of interpolation points.

The first example illustrates a rectangular plate with a central circular hole which is tension loaded in the x -direction (Fig. 1). Mapping the domain we choose the outer edge to be rounded by the radius $b/10$ and prescribed by a small partition m (4 to 8). The calculated results of the stress concentration factor in point T are presented in Table I. In the last line of the Table we can see the results of J. HOWLAND for an infinite band [3].

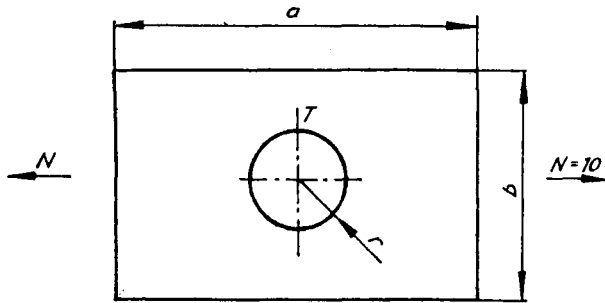


Fig. 1. Rectangular plate with a circular hole subjected to a continuous tension load

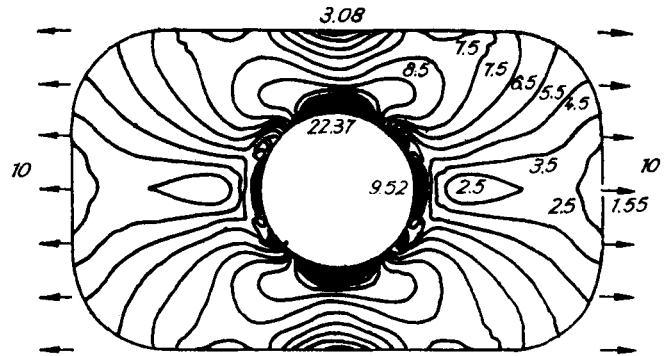


Fig. 2. Equipotential functions of the main tangential stresses

Table I

$a/b/r/b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1	3.09	3.36	3.87	4.76	6.38	9.47	16.36
1.5	3.05	3.19	3.46	3.91	4.65	5.85	—
2	3.04	3.16	3.40	3.79	4.43	5.47	7.25
2.5	—	—	3.38	3.76	4.37	5.36	7.05
3	—	—	—	—	4.36	5.33	7.00
∞	3.03	3.14	3.36	3.74	4.32	—	—

Table II

a/D	A	B	C
0.1	8.757	5.053	5.053
0.2	12.065	5.290	7.370
0.3	15.903	5.787	9.427
0.4	19.059	6.660	13.088
0.5	26.325	8.805	19.171
0.6	57.110	14.376	37.234

Fig. 2 illustrates the behaviour of the main tangential stresses for $a/b = 1.5$ and $r/b = 0.6$ in N/mm^2 .

The next example treats a circular plate with a square hole (Fig. 3). The stress concentration factors in the transition point at the prescribed accuracy of the mapping (A) and at the given ratio $r/a = 0.1$ (B) and $r/D = 0.01$ (C) can be seen from Table II.

Fig. 4 shows the main tangential stresses in N/mm^2 for the case of $a/D = 0.5$ at the given accuracy of the mapping.

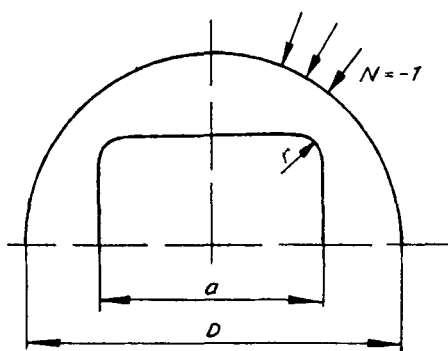


Fig. 3. Circular plate with a square hole subjected to a continuous compression load

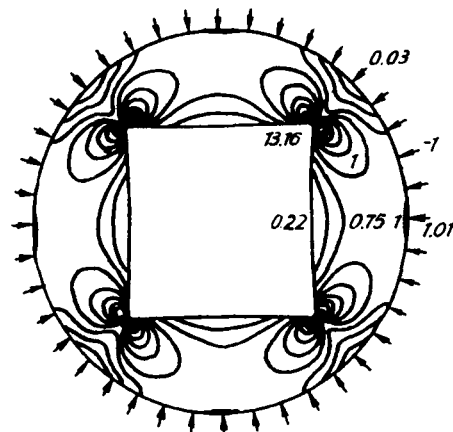


Fig. 4. Equipotential functions of the main tangential stresses

References

- BATISTA, M., Analysis of Two-Fold Connected Design Elements, Master Sc. Work, Ljubljana 1984.
- MUSHELISHVILI, N. I., Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff, Groningen 1953.
- SAWIN, G. N., Spannungserhöhung am Rande von Löchern, VEB Verlag Technik, Berlin 1956.
- Угодчиков, А. Г.; Степанов, М. Ю., Решение задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах, Высшая школа, Москва 1970.

Address: Assoc. Prof. Dr. FRANC KOSEL, M. sc. Ing. M. BATISTA, Dr. B. ŠTOK, Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Murnikova 2, P. P. 394, 61000 Ljubljana, Jugoslavija

DE BOER, R.

Bruchbedingung für spröde Werkstoffe und Traglastverfahren

1. Einleitung und Zielsetzung

Spröde Werkstoffe gelangen in vielen Bereichen des Ingenieurwesens bei der Erstellung von Tragwerken zur Anwendung. Es sei in diesem Zusammenhang an Tragwerke erinnert, die aus Beton oder Ziegel gebaut werden, und an Dämme und sonstige Grundbauwerke, die aus granularen Medien bestehen. Bei der Behandlung dieser Werkstoffe ist die Frage nach Versagen oder Bruch von besonderer Bedeutung. Eine sehr übersichtliche Beschreibung des Versagens kann erreicht werden, wenn kontinuumsmechanische und plastizitätstheoretische Methoden angewendet werden. Dies setzt voraus, daß das Materialgefüge zusammenhängend bleibt. Dies ist bei granularen Stoffen und auch bei Beton und anderen spröden Werkstoffen im Bruchzustand im allgemeinen der Fall, wo sich solche Bereiche ausbilden, in denen der spröde Werkstoff in einen granularähnlichen Stoff übergeht.

Bei isotropen Werkstoffen ist das Einsetzen des Bruches, d. h. das ungehinderte Anwachsen der Formänderungen, an eine skalarwertige Funktion, die von den Invarianten des Spannungstensors abhängt, gebunden. Im Gegensatz zu duktilen Materialien zeigen die Versuchsergebnisse für spröde Werkstoffe eine starke Abhängigkeit der Bruchbedingung vom hydrostatischen Spannungszustand. Eine solche Bruchbedingung mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme ist erstmalig von DRUCKER und PRAGER [1] formuliert worden. Sie stellen einen linearen Zusammenhang her zwischen der Wurzel aus der zweiten Invarianten der Spannungsdeviatoren und dem hydrostatischen Spannungszustand. Dieser lineare Zusammenhang läßt sich im allgemeinen für spröde Werkstoffe nicht aufrechterhalten (s. [2]).

Ziel der folgenden Überlegungen ist die Entwicklung einer solchen mathematisch einfachen Bruchbedingung, die sowohl für spröde als auch für granulare Materialien gültig ist und mit der es möglich ist, Traglasttheoreme anzugeben, die den wirklichen Bruchzustand einschränken.

2. Bruchbedingung und Traglastsätze

Bevor wir uns der Entwicklung der Bruchbedingung zuwenden, seien die wichtigsten stoffunabhängigen Grundgleichungen im Rahmen der geometrisch-linearen Theorie angegeben. Die erste Invariante des Spannungstensors \mathbf{T} und die zweite Invariante des Spannungsdeviators \mathbf{T}^D sind durch

$$\text{I}_{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{I}, \quad \text{II}_{\mathbf{T}^D} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D \quad (2.1)$$

definiert. Dabei ist \mathbf{I} der Identitätstensor. Entsprechend führen wir die Invarianten der Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{E}}$ ein:

$$\text{I}_{\dot{\mathbf{E}}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{I}, \quad \text{II}_{\dot{\mathbf{E}}^D} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^D \cdot \dot{\mathbf{E}}^D. \quad (2.2)$$

Die Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{E}}$ sind aus dem Feld der Geschwindigkeiten \mathbf{v} herleitbar:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v}). \quad (2.3)$$

Weiterhin haben die Spannungen den Gleichgewichtsbedingungen

$$\text{Div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

zu genügen. Dabei ist ρ die Dichte und \mathbf{b} eine eingeprägte Beschleunigung.

Außerdem seien der Spannungsvektor \mathbf{t} auf dem Teilbereich $\partial \mathcal{P}_t$ der Oberfläche des spröden Körpers und der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} auf dem Teilbereich $\partial \mathcal{P}_v$ der Oberfläche vorgegeben.

Der zeitliche Zuwachs der mechanischen Arbeit infolge der Oberflächenspannungsvektoren \mathbf{t} und der Volumenkräfte $\rho \mathbf{b}$ läßt sich durch den Zuwachs der inneren Formänderungsarbeit darstellen:

$$\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{r} \, dA + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \, dV. \quad (2.5)$$

Hierin bezeichnen \mathcal{P} den Körper mit den Volumenelementen dV und $\partial \mathcal{P}$ die Oberfläche des Körpers mit den Flächenelementen dA . Im folgenden machen wir Gebrauch von dem starr-plastischen Schema des Traglastverfahrens (s. [1]), bei dem die elastischen Verzerrungsanteile vernachlässigt werden. $\dot{\mathbf{E}}$ stellt somit die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten dar. Aus thermodynamischen Betrachtungen finden wir dann, daß der Zuwachs der spezifischen plastischen Formänderungsarbeit stets positiv sein muß:

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} > 0. \quad (2.6)$$

Nach Angabe der stoffunabhängigen Grundgleichungen kommen wir zur Formulierung der Bruchbedingung. Wir postulieren eine Bruchbedingung vom hyperbolischen Typ mit den feldlich und zeitlich unabhängigen Werkstoffkenngrößen α , β und κ

$$F = \sqrt{\text{II}_{\mathbf{T}^D} + \frac{1}{2} \alpha^2 \text{I}_{\mathbf{T}}^2} + \beta \text{I}_{\mathbf{T}} = \kappa. \quad (2.7)$$

die mit entsprechender Wahl der Größen α , β , κ die Bruchbedingung in [2] für Beton enthält. Weiterhin enthält sie mit α gleich Null als Sonderfall die Drucker-Pragersche Beziehung (s. [1]) und mit α und β gleich Null die von Mises'sche Fließbedingung. Die Bruchbedingung (2.7) ist homogen in dem Spannungstensor, so daß nach dem Eulerschen Satz

$$F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{T} = \kappa \quad (2.8)$$

gilt. Da κ positiv ist, muß auch $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}$ stets positiv sein. Somit können wir die thermodynamische Restriktion (2.6) hinreichend erfüllen, wenn wir für $\dot{\mathbf{E}}$ das Fließgesetz nach dem Konzept vom plastischen Potential einführen:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}}, \quad (2.9)$$

wobei $\dot{\lambda}$ ein positiver skalarer Faktor ist. Mit der Wahl des Fließgesetzes (2.9) erhalten wir für den Zuwachs der spezifischen inneren Formänderungsarbeit

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda} \kappa. \quad (2.10)$$

Dies ist dieselbe Form, die auch für den von Mises-Körper gilt. Somit können wir ohne weiteren Nachweis die Traglastsätze formulieren (s. [1]):

- Der Bruchzustand ist nicht erreicht, wenn ein statisch zulässiges und sicheres Spannungsfeld gefunden werden kann, wobei man unter statisch zulässig versteht, daß das Spannungsfeld die Gleichgewichtsbedingungen (2.4) und die statischen Randbedingungen erfüllt, und unter sicher, daß die Bruchbedingung (2.7) nicht verletzt wird.
- Der Bruchzustand ist erreicht, wenn für ein kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld der Zuwachs der mechanischen Arbeit der eingepprägten Belastung gleich ist dem Zuwachs der inneren mechanischen Arbeit (s. (2.5)). Kinematisch zulässig bedeutet dabei, daß das Geschwindigkeitsfeld die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

Zur Auswertung des letztgenannten Traglasttheorems ist es erforderlich, die positive skalare Größe $\dot{\lambda}$ in (2.9) bzw. (2.10) durch Formänderungsgrößen auszudrücken. Dies gelingt unter Beachtung von (2.9), (2.7) sowie (2.2) nach länglichen Umformungen:

$$\dot{\lambda} = \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{1}{3} I_{\dot{\mathbf{E}}} - \frac{\alpha}{\gamma^2} \sqrt{\frac{1}{18} I_{\dot{\mathbf{E}}}^2 - 2\gamma^2 II_{\dot{\mathbf{E}}}} \quad (2.11)$$

mit

$$\gamma^2 = \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha^2. \quad (2.12)$$

Mit (2.11) kann somit in (2.5) der Zuwachs der inneren mechanischen Arbeit allein durch die Werkstoffkenngröße κ und durch Formänderungsgrößen dargestellt werden.

3. Schlußbemerkung

Mit der vorgeschlagenen Bruchbedingung (2.7) können experimentelle Ergebnisse, die das Einsetzen des Bruches — Versagens — von spröden und granularen Medien anzeigen, hinreichend genau beschrieben werden. Sie erlaubt außerdem im Zusammenhang mit dem Fließgesetz (2.9) Folgerungen, die im Rahmen der Traglasttheorie nützlich sind.

Literatur

- 1 DRUCKER, D. C.; PRAGER, W., Soil mechanics plastic analysis or limit design, Quart. Appl. Math. 10 (1952), 157—165.
 - 2 CHEN, ANDRIE C. T.; CHEN, WAI-FEH., Constitutive relations for concrete, J. Engineering Mechanics Division (1975), 465—481.
- Anschrift:* Prof. Dr.-Ing. REINT DE BOER, Fachgebiet Mechanik, Fachbereich 10 — Bauwesen —, Universität-GH-Essen, Universitätsstr. 15, D-4300 Essen 1, BRD

BRUHNS, O. T.

Zur Beschreibung plastischen Materialverhaltens mit Hilfe eines Zweiflächen-Modells

1. Einführung

Bei Prozessen mit wechselnden Beanspruchungen unterscheidet man zur Charakterisierung des eindimensionalen Werkstoffverhaltens zwischen monotonen und saturierten (zyklischen) Spannungs-Dehnungs-Diagrammen. Dabei stellt die zweite Kurve in aller Regel eine Grenzkurve aller möglichen Spannungs-Dehnungsverläufe dar. Überträgt man nun zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens diese Vorstellung auf allgemeine mehrdimensionale Zustände, so geht die monotone Kurve üblicherweise in eine Fließfläche über, die den Bereich elastischer Zustände von dem plastischen trennt. Entsprechend geht dann die zyklische Kurve in eine Grenzfläche über. Beide Flächen können sich im Raum der Spannungen translatorisch bewegen und aufweiten. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich bei der Beschreibung inelastischen Materialverhaltens eine solche zwei-Flächen-Theorie aus einer Theorie mit internen Variablen ableiten läßt.

2. Konstitutive Gleichungen

Unter der Annahme kleiner Verzerrungen ist es zulässig, den Gesamtverzerrungszustand ε aufzuspalten in einen reversiblen (elastischen) Anteil ε^e und einen irreversiblen (inelastischen) Anteil ε^i

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^i \quad (2.1)$$

bzw. nach materieller Ableitung nach der Zeit

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^i. \quad (2.2)$$

Für den elastischen Anteil der Formänderungen setzen wir die Gültigkeit einer Beziehung der Form

$$\varepsilon^e = \mathbf{M}(\vartheta) \sigma + \mathbf{B}(\vartheta) \vartheta \quad (2.3)$$

voraus, die sich mit $\mathbf{E} = \mathbf{M}^{-1}$ invertieren lasse zu

$$\sigma = \mathbf{E}(\varepsilon^e - \mathbf{B}\vartheta). \quad (2.4)$$

Dabei sind \mathbf{M} , \mathbf{E} und \mathbf{B} noch von der Temperatur abhängige Materialtensoren, σ ist der Cauchysche Spannungstensor, und ϑ ist die Temperatur. Das Auftreten inelastischer Formänderungen sei an die Einhaltung einer Fließbedingung

$$f(\sigma, \vartheta; q_n) = 0 \quad (2.5)$$

geknüpft, wobei im Rahmen einer Theorie mit internen Variablen q_n diese zusätzlich zu den externen Variablen σ und ϑ eingeführt werden, um die bei inelastischen Formänderungen zu beobachtenden Veränderungen auf der Mikroskala näherungsweise durch die Entwicklung dieser Größen erfassen zu können.

Bezeichnen wir nun mit $f_{(n)}$ die jeweilige partielle Ableitung von f nach der angegebenen Größe, so beschreibt \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}_\sigma}{g}, \quad g = \|\mathbf{f}_\sigma\| \quad (2.6)$$

die Normale an die Fließfläche f , und

$$L = \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{g} f_\vartheta \dot{\vartheta} \quad (2.7)$$

ist die Belastungsfunktion. Als Anwachsgesetze für die internen Variablen sollen hier in den Geschwindigkeiten der externen Variablen lineare Beziehungen Verwendung finden

$$\dot{q}_n = \hat{q}_n(\sigma, \vartheta; q_n) \langle L \rangle, \quad (2.8)$$

wobei mit

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & f = 0 \wedge L \geq 0 \\ 0, & f < 0 \vee L < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

der Tatsache Rechnung getragen wird, daß ein Anwachsen der internen Variablen sinnvollerweise an das Anhalten inelastischer Formänderungen geknüpft sein sollte. In diesem Zusammenhang kann dann auch die bekannte Normalenregel

$$\dot{\varepsilon}^i = \frac{\langle L \rangle}{H} \mathbf{n} \quad (2.10)$$

mit $H = H(\cdot)$ als Plastizitätsmodul als Spezialfall von (2.8) interpretiert werden.

Unter Bezug auf das in der Einführung Gesagte wollen wir uns hier auf eine Zahl von 4 internen Variablen beschränken, wobei im Sinne einer Kombination der klassischen Modellvorstellungen isotrope und kinematische Verfestigung die ersten beiden als Translationstensoren ξ und β die Verschiebungen der Fließ- bzw. Grenzfläche beschreiben, die beiden restlichen als skalare Größen das Anwachsen dieser Flächen steuern. Dabei gilt es zu beachten, daß die Bewegungen beider Flächen nicht ganz unabhängig voneinander verlaufen können. So ist beispielsweise ein gegenseitiges Durchdringen beider Flächen von vornherein auszuschließen. Aus diesem Grunde werden als weitere spezielle Formen von (2.8) eingeführt [1]

$$\dot{\xi} = H^\xi \frac{\langle L \rangle}{H} \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}, \quad \dot{\beta} = \dot{\xi} - N\eta \quad (2.11)$$

mit

$$N = \frac{\langle L \rangle}{H} \frac{H^\xi - H^\beta}{\eta \cdot \mathbf{n}}, \quad (2.12)$$

wobei \mathbf{v} die Richtung von ξ angibt und η vom auf der Fließfläche $f = 0$ liegenden Spannungspunkt σ in Richtung des diesem zugeordneten Punktes $\bar{\sigma}$ auf der Grenzfläche $F = 0$ weist. Das Anwachsen beider Flächen sei beschrieben durch

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{2} g \varepsilon^t \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} g \frac{\langle L \rangle}{H}, \quad \dot{\bar{\kappa}} = \lambda \dot{\kappa}, \quad (2.13)$$

so daß für den Vergleich mit dem eindimensionalen Versuch die folgende Abbildung gilt

$$\dot{\xi} = H^\xi ||\dot{\varepsilon}^t||, \quad \dot{\beta} = H^\beta ||\dot{\varepsilon}^t||, \quad \dot{\kappa} = \frac{g}{2} ||\dot{\varepsilon}^t|| \quad (2.14)$$

mit den Materialwerten

$$H^\xi = H + \frac{1}{2} f_\kappa, \quad H^\beta = H^0 + \frac{1}{2} F_{\bar{\kappa}}, \quad H^0 = H|_{\delta=0}. \quad (2.15)$$

3. Isotropes Materialverhalten

Im folgenden wollen wir nun isotropes, im Verlauf inelastischer Formänderungen inkompressibles, Materialverhalten annehmen. In Anlehnung an die v. Mises-Fließbedingung gelte ferner

$$f = (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi) - \sigma_f^2(\vartheta, \kappa) = 0 \quad (3.1)$$

bzw. für die Grenzfläche

$$F = (\bar{\sigma}' - \beta) \cdot (\bar{\sigma}' - \beta) - \sigma_F^2(\vartheta, \bar{\kappa}) = 0, \quad (3.2)$$

wobei die Funktionen σ_f bzw. σ_F aus dem monotonen bzw. zyklischen Zugversuch bestimmt seien und der Strich die jeweils zugehörige Deviatorgröße kennzeichnet. Gehen wir nun davon aus, daß für den zugeordneten Spannungspunkt $\bar{\sigma}$ auf der Grenzfläche gilt

$$\mathbf{F}_{\bar{\sigma}} = \lambda \mathbf{f}_\sigma, \quad \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}, \quad (3.3)$$

so läßt sich der Zusammenhang zwischen $\bar{\sigma}$ und σ angeben als

$$\bar{\sigma}' = \lambda(\sigma' - \xi) + \beta, \quad \lambda = \frac{||\bar{\sigma}' - \beta||}{||\sigma' - \xi||} = \frac{\sigma_F}{\sigma_f}, \quad (3.4)$$

Für den Abstand beider Spannungspunkte δ und die Richtung η gilt ferner [1]

$$\delta = ||\bar{\sigma}' - \sigma'||, \quad \eta = \frac{1}{\delta} (\bar{\sigma}' - \sigma'). \quad (3.5)$$

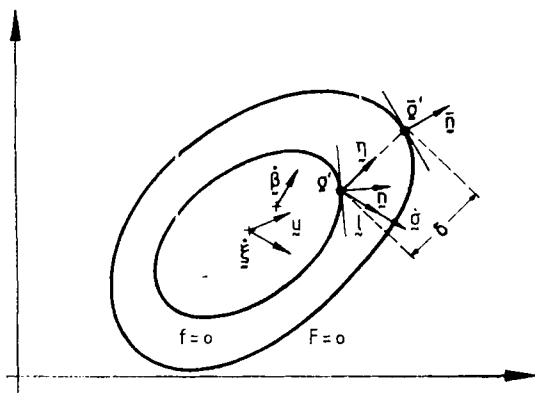
Im vorgestellten Modell sind die klassischen Modellvorstellungen plastischen Materialverhaltens wie auch eine ganze Reihe von Modifikationen als Sonderfälle enthalten. So erhalten wir zum einen für $H^\xi = H^\beta = 0$ aus (2.11) und (2.12) ein rein isotropes Verfestigungsverhalten gemäß

$$\dot{\varepsilon}^t = \frac{\langle L \rangle}{H} \mathbf{n}, \quad H = \frac{\partial \sigma_f^2}{\partial \kappa}, \quad (3.6)$$

während andererseits für $f_\kappa = F_{\bar{\kappa}} = 0$ wegen (2.15) ein rein kinematisches Modell eingenommen wird

$$\dot{\xi} = \langle L \rangle \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}, \quad \dot{\beta} = \dot{\xi} - \langle L \rangle \left(1 - \frac{H^0}{H} \right) \frac{\eta}{\eta \cdot \mathbf{n}}. \quad (3.7)$$

Je nach Wahl der hierin bisher noch offenen Richtung von $\dot{\xi}$ läßt sich (3.7) schließlich auf bekannte Modellansätze zurückführen; so für $\mathbf{v} = \mathbf{n}$ auf den wohl gebräuchlichsten Ansatz von PRAGER [2], für $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ auf den Ansatz von ZIEGLER [3], für $\mathbf{v} = \mathbf{l}$ auf den von PHILLIPS [4] und schließlich für $\mathbf{v} = \eta$ auf den von MRÓZ [5]. Dabei kennzeichnet \mathbf{u} die Richtung der Spannung σ' vom „Mittelpunkt“ der Fließfläche aus gemessen, während \mathbf{l} die Richtung der Spannungsänderung $\dot{\sigma}$ angibt.

Abb. 1. Fließfläche $f = 0$ und Grenzfläche $F = 0$

Die aus entsprechenden Experimenten für einen austenitischen Stahl X6CrNi1811 abgeleiteten Materialfunktionen $H(\cdot)$, $\sigma_f(\cdot)$ sowie $\sigma_F(\cdot)$ sind in [1] angegeben. Das mit diesen Funktionen nachgerechnete nicht-radiale Beispiel eines dünnwandigen Zylinders unter kombinierter Zug- und Schubbeanspruchung liefert — im Gegensatz zu Rechnungen mit anderen Modellen — eine erfreulich gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Literatur

- 1 BRUHNS, O. T.; MÜLLER, R., Some remarks on the application of a two-surface model in plasticity. *Acta Mechanica* **53** (1984), 81.
- 2 PRAGER, W., A new method of analyzing stresses and strains in workhardening plastic solids. *Journ. Appl. Mech.* **23** (1956), 493.
- 3 ZIEGLER, H., A modification of Prager's hardening rule. *Quart. Appl. Math.* **17** (1959), 55.
- 4 PHILLIPS, A.; WANG, G. J., An analytical study of an experimentally verified hardening law. *Journ. Appl. Mech.* **42** (1975), 375.
- 5 MROZ, Z., On the description of anisotropic workhardening. *J. Mech. Phys. Solids* **15** (1967), 163.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. O. BRUHNS, Institut für Mechanik, Universität — Gesamthochschule Kassel, Mönchebergstr. 7, D-3500 Kassel, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 128 · T 129

BRUNK, G.

Eindeutigkeit der Lösungen der Bewegungsgleichungen eines nichtlinearen elastischen Materials

Es wird gezeigt, daß die Stoffeigenschaften „Stabilität“ und „Reversibilität“ (Existenz einer Formänderungsenergie) hinreichend für die Eindeutigkeit der Lösungen der Bewegungsgleichungen eines nichtlinear elastischen Körpers sind. Das Beweisverfahren ist eine Verallgemeinerung des Vorgehens, mit dem Eindeutigkeit in der Potentialtheorie, [1] S. 54 ff., aber auch in der nichtlinearen Elektrostatik [2], [3] und Elastostatik [3] gezeigt werden kann. Es schließt nicht die Vorgänge ein, bei denen singuläre Wellenfronten auftreten.

1. Das Randwertproblem

Wir schreiben die Bewegungsgleichung in der Form

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f}_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

\mathbf{u} ist der Verschiebungsvektor, ξ der Ort in der Bezugskonfiguration Ω , ρ_0 die Massendichte und \mathbf{f}_0 die Kraftdichte in Ω , \mathbf{T} der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor. Die Randbedingungen sind

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a \quad \text{auf } q_a, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{t}_b \quad \text{auf } q_b \quad (2)$$

mit $q_a \cup q_b = \partial\Omega$, $\alpha(q_a \cap q_b) = 0$. α ist das Maß, d. h. der Flächeninhalt auf $\partial\Omega$, \mathbf{v} der Normalenvektor. Der Spannungstensor \mathbf{T} sei durch die Materialgleichung

$$\mathbf{T} = \mathcal{T}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{H} := \nabla_{\xi} \mathbf{u} \quad (3)$$

gegeben.

2. Materialeigenschaften

Die Materialfunktion $\mathcal{F}(\cdot)$ sei mit folgenden Eigenschaften ausgestattet:

(S) Materialstabilität:

$$\delta \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{H} > 0 \quad \text{für Vorgabe} \quad \delta \mathbf{T} \neq \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \delta \mathbf{H} \neq \mathbf{0}. \quad (4)$$

Die Operation \cdot bezeichnet das innere Produkt zweier Tensoren 2. Stufe, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i B_{ij}$, $\delta(\cdot) := (\cdot)_2 - (\cdot)_1$ ist eine im allgemeinen endliche Differenz bezüglich zweier Zustände 1 und 2.

(R) Reversibilität:

$$\mathbf{A} \cdot \partial_{\mathbf{H}} \mathbf{T} = \partial_{\mathbf{H}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{A} \Leftrightarrow \text{es existiert } w_0(\mathbf{H}) \rightarrow \mathbf{T} = \partial_{\mathbf{H}} w_0. \quad (5)$$

Gleichung (5.1) ist eine Integrabilitätsbedingung für den Spannungstensor \mathbf{T} , welche gewährleistet, daß die Dichte w der elastischen Formänderungsenergie existiert.

3. Beweisidee

Man stellt zunächst die Beziehung

$$\int_{t_0}^t dt \int_{\Omega} d\alpha \nu \cdot \delta \mathbf{T} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} = J_1(t) + J_2(t) \quad (6)$$

auf. $J_1(t)$ und $J_2(t)$ sind zwei Raumintegrale, für die man zeigt,

$$\exists t_1 : J_1(t) \geq 0, \quad J_2(t) \geq 0, \quad t \in (t_0, t_1], \quad \text{für alle } \delta \mathbf{u}(t) \text{ mit } \delta \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

$$J_1(t) > 0, \quad J_2(t) > 0, \quad t \in (t_0, t_1], \quad \text{für alle } \delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

Man nimmt nun an, daß für $t \leq t_0$ eine Lösung, für $t > t_0$ zwei Lösungen $\mathbf{u}_1(\xi, t) \neq \mathbf{u}_2(\xi, t)$ existieren, d. h. $\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ für $t \leq t_0$, $\delta \mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ für $t > t_0$. Aus den Randbedingungen ergibt sich, daß die linke Seite von (6) verschwindet, und daraus weiter mit (7.1), daß $J_1(t) = 0$, $J_2(t) = 0$ für $t \in (t_0, t_1]$, während aus der Ungleichheit von \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 wegen (7.2) $J_1(t) > 0$ und $J_2(t) > 0$ für $t \in (t_0, t_1]$ folgen würde. Darum kann nur $\delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ für Zeiten $t \in (t_0, t_1]$ gelten. Diese Überlegung kann man für Zeiten $t \in (t_1, t_2]$ wiederholen. Denkbar wäre, daß bei mehrfacher Wiederholung das resultierende Zeitintervall $(t_0, t_n]$ beschränkt bleibt, $t_n \rightarrow t_\infty$. Das führt aber dann auf einen Widerspruch, wenn für alle $t > t_0$ die Existenz von Lösungen bewiesen werden kann.

4. Einzelschritte

Durch Anwendung des Satzes von Gauß auf die linke Seite von (6) ergibt sich

$$J_1(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\tau \varrho_0 \delta \dot{\mathbf{u}}^2, \quad J_2(t) := \int_{\Omega} d\tau \int_{t_0}^t dt \delta \mathbf{T} \cdot \delta \dot{\mathbf{H}}. \quad (8)$$

Die Beziehungen (7.1) und (7.2) sind durch $J_1(t)$ offenbar für beliebige t_1 erfüllt. Für $J_2(t)$ finden wir folgende Umformung

$$J_2(t) = \int_{\Omega} d\tau \int_{t_0}^t dt \mathbf{C} \cdots \frac{1}{2} (\mathbf{K} \dot{\mathbf{K}} + \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} := \int_0^1 d\lambda \partial_{\mathbf{H}} \mathbf{T}(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{K}). \quad (9)$$

Dabei ist $\mathbf{K} := \delta \mathbf{H}$. Der Tensor 4. Stufe \mathbf{C} ist wegen der Stoffeigenschaft (S), (4), positiv definit und besitzt wegen der Eigenschaft (R), (5), die Symmetrie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ für alle Tensoren 2. Stufe \mathbf{A} . Da $\mathbf{K}(t_0) = \mathbf{0}$ ist, kann man zeigen

$$\exists t_1 : \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{K} \dot{\mathbf{K}} + \dot{\mathbf{K}} \mathbf{K}) \cdot \mathbf{Z} > 0, \quad \text{für alle } \mathbf{Z} \neq \mathbf{0}, \quad t \in (t_0, t_1]. \quad (10)$$

Hieraus und aus der Definitheit von \mathbf{C} ergibt sich schließlich $J_2(t) > 0$ für $t \in (t_0, t_1]$, falls $\mathbf{K}(t) \neq \mathbf{0}$.

Literatur

- 1 SIMONYI, K., Theoretische Elektrotechnik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- 2 STEELE, CH. W., Uniqueness theorem for a static electric or magnetic field in a saturable medium, J. Appl. Phys. **44** (1973), 3790.
- 3 BRUNK, G., Nichtlineare ideal elektromagnetische Medien als Analoga elastischer Stoffe: Eindeutigkeitsätze und Hamiltonsches Prinzip, ZAMM **64** (1984), T 118—T 120.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. GERD BRUNK, Technische Universität Berlin, I. Institut für Mechanik — C 8 — 1000 Berlin (West) 12

ĆORIĆ, B.

Collapse of Plate Girders Subjected to Patch Loading

This paper describes results of experimental and numerical studies carried out as a part of a continuing investigation at the University of Belgrade, Yugoslavia, and the University College Cardiff, U.K., into a collapse of plate girders subjected to localised edge loading.

For slender plate girders, where failure is induced by bending of the web, the relationship between the collapse load and elastic critical load of the web is investigated. The influence of co-existent bending stresses on the collapse load is also investigated. Details of the girders tested are shown in Fig. 1. Each girder comprised three panels with aspect ratios $b/d = 2$. In the first test, the girders were simply supported at A—A and the middle panel was loaded by a concentrated load P applied through a 50 mm wide bar at the centre of the panel. The load was then increased up to failure. The girder was then simply supported at B—B and the end panel tested in the same way. In each test the girder was restrained laterally so that it did not become laterally unstable. Varying the span induced different values of the co-existent bending stresses at collapse. The mode of failure obtained by the test and the assumed mechanism are illustrated in Fig. 1, and the test data are given in Table 1.

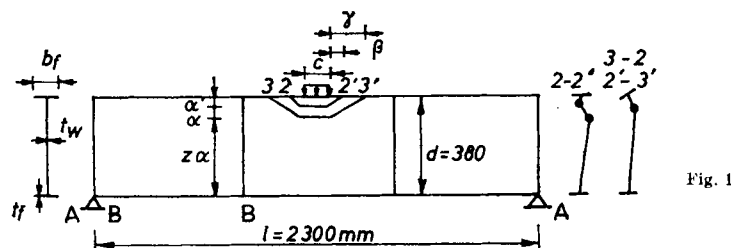


Fig. 1

Table 1

Girder	Support	t_w mm	b_f	t_f	c	σ_w N/mm ²	σ_f	P_{ex} N	σ_b/σ_w
D2-3S	B-B	1.96	80	3.05	50	178	272	33550	0.26
D2-3S	A-A	1.96	80	3.05	50	178	272	32000	0.77
D3-6S	B-B	3.0	80	6.25	50	245	298	84100	0.25
D3-6S	A-A	3.0	80	6.25	50	245	298	84000	0.74

It is assumed that plastic hinges form in the flange accompanied by yield lines in the web. Following the upper bound theorem of plastic collapse and equating the work done by the applied loads to the internal dissipation of plastic energy gives

$$P_u = \frac{4 \cdot M_f}{\beta} + 2 \cdot M_w \cdot \beta \cdot \frac{\tan \theta}{\left(1 + \frac{1}{z}\right) \cdot \alpha} + M_w \cdot c \cdot \left[\frac{\tan \theta}{\alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)} \left(2 + \frac{1}{z}\right) \right] + 2 \cdot M_w \cdot \gamma \frac{\tan \theta}{\alpha} \quad (1)$$

where:

$$M_f = \frac{1}{4} \cdot \sigma_f \cdot b_f \cdot t_f^2, \quad M_w = \frac{1}{4} \cdot \sigma_w \cdot t_w^2, \quad \beta = \sqrt{\frac{2M_f \cdot \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)}{M_w \cdot \tan \theta}} \quad (2)$$

The deformation of the flange just prior to collapse must be compatible with the deformation of the web adjacent to flange. Hence:

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{z}{\cos \frac{90 - \theta}{z}} \right) - (1 + z) = \frac{M_f^2}{E \cdot M_w \cdot b_f \cdot t_f^3} \left(1 + \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{\tan \theta} \quad (3)$$

A suitable choice for α' , γ , z has been found to be:

$$\alpha' = \frac{c}{1.25t_w}, \quad \gamma = \frac{t'}{t_w} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma_w} \cdot \frac{1}{10}, \quad z = \frac{\gamma}{d} \left(0.6 \frac{d}{\gamma} - 6.5 \frac{\gamma}{d}\right) \quad (4)$$

where t' is a reference thickness taken as 2.0 mm and σ' a reference yield stress taken as 300 N/mm².

Equations (1) to (4) can now be solved to give a value for the collapse load. Equation (1) has been shown to provide a lower bound solution for over one hundred tests on slender plate girders [1], giving a mean value of P_{ex}/P_u of 1.42 and a coefficient of variation V of 17.8%.

The elastic critical load P_{cr} of a web panel subjected to localised edge loading, assuming all edges of the panel to be simply supported, is given by [2]:

$$P_{cr} = K \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot t_w^3}{12(1 - \nu^2) \cdot d} \quad (5)$$

where K is a factor which depends on the girder dimensions and the loaded length c .

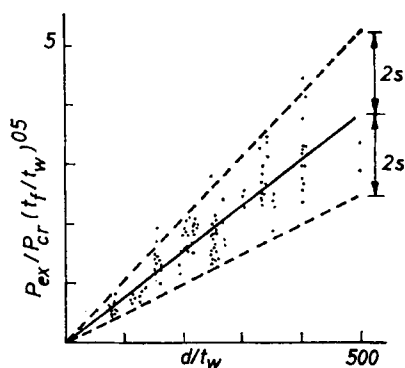


Fig. 2

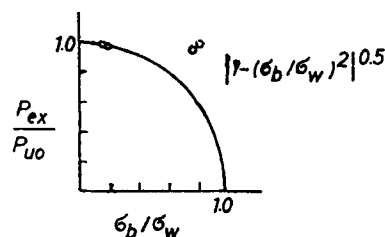


Fig. 3

In Fig. 2 over one hundred test results from various sources are compared with P_{ex}/P_{cr} and the mean line is shown together with two other lines, spaced at two standard deviations on each side of the mean line, which define 92% confidence limits. There is a good agreement between theory and experiment.

Some authors [3] recommend that the influence of co-existent bending stresses can be taken into account by a factor:

$$\left[1 - \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_w} \right)^2 \right]^{0.5}.$$

The test results given in Table 1 are plotted in Fig. 3. P_{u0} is the value of the collapse load for $\sigma_b = 0$, which is deduced from the test results when the girder was simply supported at B—B. It can be seen that the reduction factor provides a conservative estimate of the influence of co-existent bending stresses.

List of symbols: E Young's modulus, P_{cr} elastic critical load, P_{ex} experimental collapse load, P_u predicted collapse load, ν Poisson's ratio, σ_b bending stress, σ_f flange yield stress, σ_w web yield stress.

References

- 1 ĆORIĆ, B., Theoretical and Experimental Analysis of Local and Lateral Buckling of Beams with Distortional Cross Section, Ph. D. Thesis, Univ. of Belgrade, Belgrade 1982.
- 2 KHAN, M. Z.; JOHNS, K. C., Buckling of web plates under combined loadings, Proc. ASCE, ST10 (1975) Oct., 231—239.
- 3 ROBERTS, T. M.; ROCKEY, K. C., A mechanism solution for predicting the collapse load of slender plate girders subjected to edge loading, Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2, 67 (1979) March, 167—182.

Address: Dr. B. ĆORIĆ, Univerzitet u Beogradu, Gradjevinski Fakultet, Institut za Mehaniku i Teoriju Konstrukcija, Bulevar revolucije 73, 11 000 Beograd, Jugoslavija

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 131—T 133

DORAU, H.-U.

Zur experimentellen Ermittlung von Stoffparametern für ebene elastisch-orthotrope Cosserat-Kontinua

1. Einführung

Bei der von den Gebrüdern COSSERAT aufgestellten Theorie zur Kontinuumsmechanik werden den einzelnen Materiepunkten starre Dreibeine zugeordnet, die sich unabhängig vom Feld der Verschiebungen drehen können, so daß drei zusätzliche Freiheitsgrade der Kinematik entstehen. Dem entsprechen in der Statik neben den nicht mehr symmetrischen „Kraftspannungen“ neu einzuführende „Momentenspannungen“, die solche Rotationen hervorrufen. BESDO [1, 2] hat sich in zahlreichen Vorträgen sowohl mit der Problematik des nichtlinearen Cosserat-Kontinuums als auch mit der Anwendung der Theorie auf „Klotz-Blattfeder-Modelle“ beschäftigt. V. BROOCK [3] untersuchte ebene Blockstrukturen mit Finiten Elementen und verglich mit Cosserat-Lösungen.

2. Grundgleichungen des ebenen elastischen Cosserat-Kontinuums

Ein scheibenförmiges Cosserat-Material-Partikel (ebener Spannungszustand) besitzt zwei Verschiebungsfreiheiten u, v sowie eine Verdrehfreiheit ψ (s. Abb. 1). An ihm greifen Normalspannungen, Schubspannungen sowie — im Unterschied zum klassischen Kontinuum — Momentenspannungen an. Bildet man das Kräfte- bzw. Momentengleichgewicht an diesem infinitesimal kleinen Cosserat-Teilchen, so erhält man die Gleichungen

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} = 0, \quad \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0, \quad \mu_{xz,x} + \mu_{yz,y} + \sigma_{xy} - \sigma_{yx} = 0. \quad (1)$$

Das Cosserat-Stoffgesetz für den ebenen Spannungszustand und für ein elastisches Material mit orthotroper Struktur — ausgezeichnete Richtungen: x, y — lautet wie folgt (die Schreibweise $u_{,x}$ bedeutet die partielle Ableitung von u nach x):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ \mu_{xz} \\ \mu_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b} & \bar{d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{f} & \bar{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{h} & \bar{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_{zx} \\ \kappa_{zy} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_{zx} \\ \kappa_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,x} - \psi \\ u_{,y} + \psi \\ \psi_{,x} \\ \psi_{,y} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Die Dehnungen und die den Momentenspannungen zugeordneten Krümmungen sind gemäß Gleichung (2) mit den Verschiebungen und der Drehung verknüpft (Verträglichkeitsbeziehungen). Ein linear-elastisches ebenes Cosserat-Kontinuum der beschriebenen Art läßt sich folglich durch maximal acht linear unabhängige Stoffparameter beschreiben (3 Zugmoduln, 3 Schubmoduln und 2 Biegemoduln).

3. Ermittlung der Cosserat-Stoffparameter

Analog zum Vorgehen bei klassisch orthotropen Materialien werden zwei orthogonale Zugversuche (jeweils einachsiger Spannungszustand) durchgeführt und die Längs- und Querdehnungen gemessen. Zusammen mit den bekannten Zugspannungen in x - bzw. y -Richtung erhält man hieraus explizit die gesuchten Zugmoduln. Es liegt nun die Überlegung nahe, die Biegemoduln aus einem Biegeversuch zu bestimmen. Das äußere Moment wird jedoch primär zur Dehnung bzw. Stauchung der Randfasern benutzt (lineare Normalspannungsverteilung). Der Anteil, der zur Drehung der Material-Partikel benötigt wird (konstante Momentenspannungsverteilung), ist in der Regel vernachlässigbar klein. Die Biegemoduln sind aus diesem Versuch folglich nicht exakt ermittelbar. In Abb. 2 ist ein Ausschnitt aus einem unendlich hohen Scheibenstreifen dargestellt. Am linken Scheibenrand sind sowohl die Verschiebungen als auch die Verdrehung behindert. Am rechten Scheibenrand werden die Horizontalverschiebung und die Verdrehung behindert, während sich infolge einer Schubspannung σ_0 die Vertikalverschiebung v_0 einstellt. Beim klassischen Kontinuum erhält man eine linear über der Scheibenbreite ansteigende Verschiebungsfunktion v , während beim Cosserat-Kontinuum infolge der Momentenspannungen am Rand ($\psi = 0$ nur am Rand $\rightarrow \mu \neq 0$) die Verschiebungsfunktion die Form eines „S-Schlages“ annimmt. Diese Funktion läßt sich meßtechnisch qualitativ feststellen, aber nicht quantitativ auswerten. Es werden daher Schubnachgiebigkeiten gemäß Gleichung (3) eingeführt

$$\gamma(B) = \frac{v_0}{B\sigma_0} = \beta \left[1 - \lambda \frac{2\alpha}{B} \operatorname{th} \frac{B}{2\alpha} \right]. \quad (3)$$

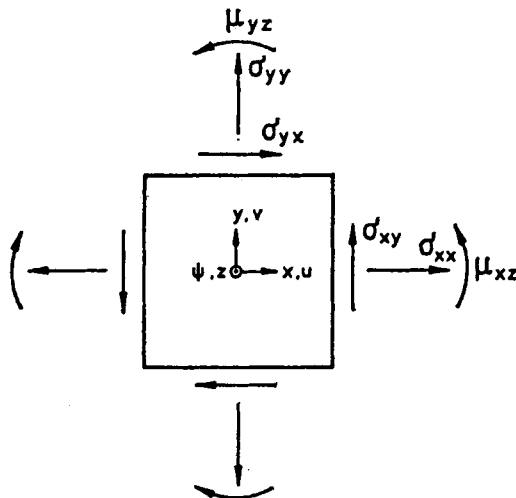


Abb. 1. Spannungen am Cosserat-Material-Partikel

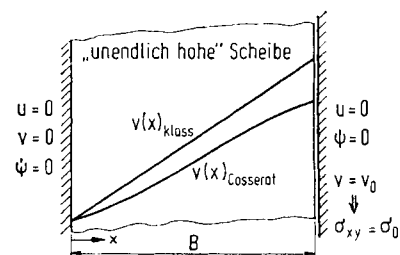


Abb. 2. Schubversuch

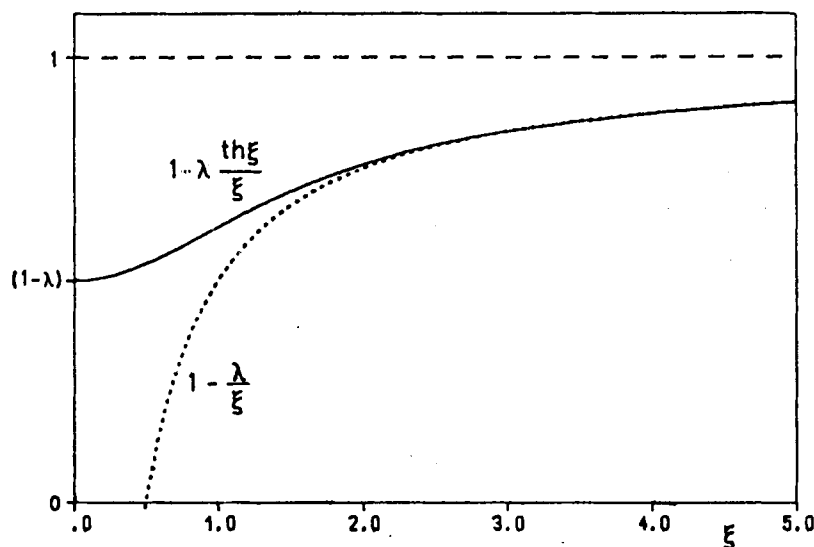


Abb. 3. Qualitativer Verlauf der Schubnachgiebigkeit

Die Parameter β und λ hängen lediglich von den Schubmoduln, der Parameter α von den Schub- und Biegemoduln ab. Beim klassischen Kontinuum sind die Schubnachgiebigkeiten stets konstant ($\beta = 1/G$). Beim Cosserat-Kontinuum liegt ein mit zunehmender Scheibenbreite langsam abklingender Randeffekt vor (vgl. Wölbkrafttorsion). Der qualitative Verlauf der Schubnachgiebigkeiten in Abhängigkeit von der Scheibenbreite ist in Abb. 3 skizziert. Die Schubnachgiebigkeiten lassen sich für verschieden große Scheiben sowohl für die x - als auch für die y -Richtung ermitteln. Die Ansatzparameter β , λ_x , λ_y und α_x , α_y kann man per Parameteridentifikation bestimmen, um anschließend die Schub- und Biegemoduln explizit aus den Ansatzgrößen zu berechnen.

4. Anwendungsmöglichkeiten

Das Verformungsverhalten von regelmäßig aufgebauten Scheibenstrukturen läßt sich durch Cosserat-Lösungen approximieren. Bei der herkömmlichen Beschreibung einer Scheibenstruktur treten Einflüsse sowohl von den Material- als auch von den Struktureigenschaften auf. Bei der kontinuumsmechanischen Betrachtung sind diese Einflüsse reduziert auf die acht Cosserat-Stoffparameter. Einige Scheibenstrukturen mit Cosserat-Eigenschaften werden in der Kurzveröffentlichung von Herrn Dipl.-Ing. JONASCH (s. dieses Heft S. T 143—T 146) erläutert.

Literatur

- 1 BESDO, D., Zur Beschreibung des Verhaltens von ebenen Blockstrukturen als Cosserat-Kontinua. ZAMM **65** (1985) 4, T 124—T 125.
- 2 BESDO, D., Beitrag zu einer nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. Habilitation, Braunschweig 1973.
- 3 VON BROOCK, U., Zur Anwendung des elastischen Cosserat-Kontinuums bei regelmäßig strukturierten Scheiben. Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 1 Nr. 92, 1982.

Anschrift: . Dipl.-Ing. H.-U. DORAU, Institut für Mechanik, Universität Hannover, Appelstr. 11, D-3000 Hannover, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **66** (1986) 4, T 133—T 135

DZIĘCIELAK, R.

Thermal Aspects of Propagation and Decay of Acceleration Waves in a Fluid-Saturated Porous Viscoelastic Solid

The paper deals with the propagation of acceleration waves in a fluid-saturated porous medium. The two-phase medium is the system consisting of a porous viscoelastic solid skeleton filled with a viscous compressible fluid. While viscous stresses in the fluid are neglected, we assume that the fluid can exert a velocity-dependent friction force on the skeleton. The next assumptions are as follows:

- the fluid flow through the pores is laminar,
- the porosity of the medium is constant,

- the medium is statistically homogeneous and isotropic,
- each constituent has its own temperature field,
- the effects of chemical reactions have been omitted,
- displacements and displacement gradients of the solid skeleton and the fluid and their velocities are small.

Thermodynamic influences on the propagation of acceleration waves in a fluid-saturated porous elastic medium were considered earlier by BOWEN and CHEN [1]. However, these considerations were based on the theory of mixtures. The propagation of acceleration waves in such media with elastic and viscoelastic skeleton described by BIOT's theory was considered by the author [2–4], but thermal effects were omitted.

The basis of these considerations are the equations of motion of such a medium formulated by BIOT [5] and the linear constitutive relations of thermoconsolidation obtained by DERSKI [6]. The considered medium is described by the following constitutive relations:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\tilde{N}\varepsilon_{ij} + (\tilde{A}\varepsilon + \tilde{Q}\Theta) \delta_{ij} - (\tilde{\gamma}_s\vartheta_s + \tilde{\gamma}_{sf}\vartheta_f) \delta_{ij}, \\ \sigma &= \tilde{Q}\varepsilon + \tilde{R}\Theta - (\tilde{\gamma}_s\vartheta_s + \tilde{\gamma}_f\vartheta_f), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\eta_s = \tilde{\gamma}_s\varepsilon + \tilde{\gamma}_{fs}\Theta + c_v^s \ln \frac{T_s}{T_0}, \quad \eta_f = \tilde{\gamma}_{sf}\varepsilon + \tilde{\gamma}_f\Theta + c_v^f \ln \frac{T_f}{T_0} \quad (2)$$

where \tilde{A} , \tilde{N} , \tilde{Q} and \tilde{R} are the integral operators defining viscoelastic properties of the medium, $\tilde{\gamma}_s$, $\tilde{\gamma}_{sf}$, $\tilde{\gamma}_{fs}$ and $\tilde{\gamma}_f$ are the integral operators connected with thermomechanical properties of the medium, σ_{ij} are the components of the stress tensor in the solid skeleton, σ is the reduced pressure in the fluid, ε_{ij} are the components of the solid skeleton strain tensor, ε and Θ are the dilatations of the solid skeleton and the fluid, respectively, $\vartheta_s = T_s - T_0$ and $\vartheta_f = T_f - T_0$ are the relative temperatures of the solid skeleton and the fluid, respectively, η_s and η_f are the specific entropies of the solid skeleton and the fluid referred to a total volume of the medium, c_v^s and c_v^f are the specific heats of the constituents.

The balance equations written for a singular surface lead to the following statements:

1. Acceleration waves in fluid-saturated porous media consisting of definite conductors are always homothermal.
2. Acceleration waves in such a medium consisting of non-conductors are not homentropic, in general.
3. Acceleration waves in fluid-saturated porous media consisting of non-conductors are homentropic in the following cases:
 - a. If there is not any relative motion between the solid skeleton and the fluid, or
 - b. If the constituents of the medium are incompressible and the temperature gradient of the fluid is continuous, or
 - c. If the relative temperature of the fluid is equal to zero.

The homothermal acoustic tensor is symmetrical and depends only on the initial values of the relaxation functions. The acoustic tensor is non-symmetrical in the case of a medium consisting of non-conductors. This fact is caused by the terms connected with transport of heat with the fluid which flow out of the control volume of the skeleton. These terms will vanish in the propagation conditions if we consider the homentropic waves. In such a case the acoustic tensor (the homentropic acoustic tensor) is symmetrical.

As usual in such a two-phase medium two longitudinal waves and one rotational wave are propagated. In the isotropic and homogeneous medium the speeds of propagation are constant. Speeds of propagation of the homothermal waves and the homentropic rotational wave depend on the mechanical properties of the medium only. Speeds of propagation of the homentropic longitudinal wave depend on the thermomechanical properties of the medium.

For an acceleration wave propagating into a medium consisting of definite conductors the "thermal amplitudes" are related to the kinematical amplitudes. In the case of a medium consisting of non-conductors the "entropic amplitudes" are expressed by the kinematical amplitudes as well, but the relations are nonlinear. For the homentropic wave the "entropic amplitudes" are linear functions of the kinematical amplitudes and are independent of the disturbances of the medium in front of the singular surface.

The changes of the amplitudes of waves as functions of distance x are described by the parameter κ . The differential equation governing the parameter κ has been obtained from the equations of balance of linear momentum in the usual way [4]; its solution has the form

$$\kappa = C_0 \exp \left[- \frac{b(1 - \xi)^2 U^2 + \varphi_1'(0) + \beta_T U^2}{2U^3(\varrho_s + \varrho_f \xi)^2} x \right], \quad (3)$$

where C_0 is a constant, ϱ_s and ϱ_f are the mass densities of the solid skeleton and the fluid, respectively, referred to a total volume, U is the speed of propagation, b is the damping coefficient between the fluid and the solid, $\varphi_1'(0)$ is the term dependent on the initial values of the relaxation kernels, β_T is the term dependent on the thermomechanical properties of the medium, $k = 1$ denotes the longitudinal wave of the first kind and $k = 2$ denotes the longitudinal wave of the second kind. The first term $b(1 - \xi)^2 U^2$ in the square bracket is connected with the amplitude damping caused by the relative motion of fluid and skeleton; this damping through the speed of propagation

depends on the initial values of the relaxation functions and damping coefficient b . The second term $\varphi_1^{(k)}(0)$ describes the change of the amplitude connected with viscoelastic properties of the medium. The last term $\beta_T^{(k)} U^2$ expresses the additional damping resulting from thermal influences taken into account.

The sign of this term can be different. It depends on values of parameters describing thermomechanical properties of the medium. A numerical analysis of the parameter $\kappa^{(k)}$ pertaining to a kerosene-saturated sandstone, [7], reveals that the physically motivated requirement $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa^{(k)} = 0$ is satisfied in this concrete case.

References

- 1 BOWEN, R. M.; CHEN, P. J., Waves in a binary mixture of linear elastic materials, *J. Méc.* **14**, 237–266 (1975).
- 2 DZIĘCIELAK, R., Acceleration waves in a consolidating medium (in Polish), *Engineering Transactions* **26**, 307–322 (1978).
- 3 DZIĘCIELAK, R., The exact amplitude equation of acceleration waves in a consolidating medium (in Polish), *Engineering Transactions* **27**, 277–284 (1979).
- 4 DZIĘCIELAK, R., Propagation of acceleration waves in a fluid-saturated porous viscoelastic solid, *Studia Geotechnica et Mechanica* **2**, 13–23 (1980).
- 5 BIOT, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, 168–191 (1956).
- 6 DERSKI, W., Equations of thermoconsolidation in case of temperature difference between components of medium, *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn.* **26**, 529–540 (1978).
- 7 PECKER, C.; DERESIEWICZ, H., Thermal effects on wave propagation in liquid-filled porous media, *Acta Mechanica* **16**, 45–64 (1973).

Address: Dr. R. DZIĘCIELAK, Technical University of Poznań, Institute of Applied Mechanics, ul. Piotrowo 3, Post Box 5, 61–138 Poznań, Poland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **66** (1986) 4, T 135 – T 137

FOTIU, P.; IRSCHIK, H.

Statisch unbestimmte Sandwichbalken mit nichtlinearen Stoffgesetzen

Die Berechnung stofflich nichtlinearer Tragwerke erfolgt allgemein nach einer inkrementellen Methode; die klassische Vorgangsweise betrachtet dabei zwar ein linear elastisches System, dessen Steifigkeit aber schrittweise und örtlich unterschiedlich geändert werden muß. Alternativ dazu kann das stofflich nichtlineare Verhalten durch eine veränderliche fiktive Zusatzbeanspruchung des linearen Tragwerks ausgedrückt werden, wobei die Steifigkeit des Systems unverändert bleibt. Die Zusatzbeanspruchung ist mechanisch konsistenterweise in der Form von eingepprägten Eigenspannungsquellen einzuführen; wie in [1], [2] gezeigt, handelt es sich dabei im Falle eines elastoplastischen Vollquerschnittes um fiktive Temperaturbeanspruchungen. Diese Methode wird im folgenden auf den statisch unbestimmten Sandwichbalken unter quasistatischer Querbelastung p mit dünnen, stofflich nichtlinearen Deckschichten und nichtlinearem Kernkriechgesetz erweitert.

Die Eigenbiegesteifigkeit der Deckschichten wird vernachlässigt. Der Kern wird nur zur Übertragung der Schubspannungen herangezogen. (Bezeichnungen s. Bild 1a). Die nichtlinearen Stoffgesetze können immer in der allgemeinen Form $\sigma = E_b(\varepsilon - \varepsilon^N)$ für das Deckblech bzw. $\tau = G_s(\gamma - \gamma^N)$ für den Kern formuliert werden. Man erkennt die vollkommene Analogie zum linear elastischen Balken mit eingepprägten Eigenspannungsquellen ε^N, γ^N (vgl. REISSNER [3]). Alle statischen und kinematischen Größen dieses linear elastischen Ersatzbalkens konstanter Steifigkeit werden dementsprechend in den Anteil zufolge äußerer Belastung (Index *) und den Anteil zufolge Eigenspannungsquellen (Index **) zerlegt. Die Berechnung des letzteren erfolgt mittels einer erweiterten Maysel'schen Formel (vgl. [4]) für die Beanspruchung durch Eigenspannungsquellen. Die entsprechende Herleitung für den r -fach statisch unbestimmten schubelastischen Balken ist in [5] angegeben. Dementsprechend ergeben sich die Deformationen im Punkt k zufolge der Quellen ε^N, γ^N :

$$\delta_k^{**(*)} = \delta_k^{**(*)0} + \sum_{n=1}^r X_n^{**} \tilde{\delta}_{nk}^{(0)}, \quad (1)$$

wobei

$$\delta_k^{**(*)0} = \int_l (\tilde{M}_{(k)}^{(0)} m + \tilde{Q}_{(k)}^{(0)} q) dx \quad (2)$$

die Deformation des statisch bestimmten Grundsystems darstellt. X_n^{**} sind die aus den Elastizitätsgleichungen zu ermittelnden statisch Unbestimmten, und die $\tilde{\delta}_{nk}^{(0)}$ sind die Verrückungen an der Stelle k zufolge $X_n = 1$ im statisch bestimmten Grundsystem. $\tilde{M}_{(k)}^{(0)}, \tilde{Q}_{(k)}^{(0)}$ sind die Momente bzw. Querkräfte des linearen statisch bestimmten Trägers

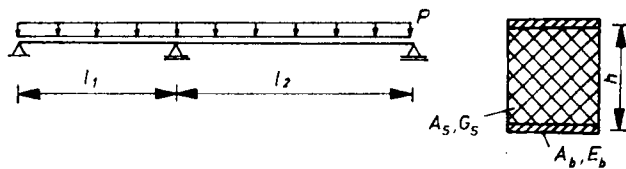


Bild 1a. Zweifeldträger mit Sandwichquerschnitt: $l_2/l_1 = 1,5$, $h/l_1 = 5,0 \cdot 10^{-3}$, $A_b/h^2 = 2,4 \cdot 10^{-3}$, $A_b/A_s = 3,0 \cdot 10^{-3}$, $E_b/G_s = 1,75 \cdot 10^4$

zufolge einer Einzelkraft $F_k = 1$ im Punkt k . m und q stellen über den Querschnitt integrierte Eigenspannungsquellen dar:

$$m = \frac{1}{J} \int_A \varepsilon^N z dA, \quad q = \frac{1}{A} \int_A \gamma^N dA. \quad (3)$$

Für den Sandwichquerschnitt gilt speziell (s. Bild 1 a):

$$m = \frac{2\varepsilon^N}{h}, \quad q = \gamma^N. \quad (4)$$

Zur Berechnung der noch unbekannten Eigenspannungsquellen m , q wird ein numerisches Verfahren angegeben:

Die Zeitachse wird in Intervalle j der Länge Δt_j und der Balken in p_i Intervalle k der Länge Δl_k unterteilt. Alle zu berechnenden Größen werden nur mehr zu den Zeitpunkten t_j und in den Intervallmitten x_k ausgewertet. Die verteilten Eigenspannungsquellen werden durch Treppenfunktionen ersetzt. Ausgehend von einem bekannten Zustand zur Zeit t_{j-1} , gilt für die Schnittgrößeninkremente im Intervall Δt_j :

$$\Delta M_j = \Delta M_j^* + \Delta M_j^{**}, \quad \Delta Q_j = \Delta Q_j^* + \Delta Q_j^{**} \quad (5.a), (5.b)$$

mit $\Delta M_j = [\Delta M_{j1}, \dots, \Delta M_{jk}, \dots, \Delta M_{jpi}]^T$ und $\Delta Q_j = [\Delta Q_{j1}, \dots, \Delta Q_{jk}, \dots, \Delta Q_{jpi}]^T$. Dabei können die Anteile zufolge Eigenspannungsbeanspruchung wie folgt dargestellt werden:

$$\Delta M_j^{**} = M^{(m)} \Delta m_j + M^{(q)} \Delta q_j, \quad \Delta Q_j^{**} = Q^{(m)} \Delta m_j + Q^{(q)} \Delta q_j \quad (6.a), (6.b)$$

mit $\Delta m_j = [\Delta m_{j1}, \dots, \Delta m_{jk}, \dots, \Delta m_{jpi}]^T$ und $\Delta q_j = [\Delta q_{j1}, \dots, \Delta q_{jk}, \dots, \Delta q_{jpi}]^T$. Die Greenschen Matrizen $M^{(m)}$, $M^{(q)}$, $Q^{(m)}$, $Q^{(q)}$ enthalten die Einflußzahlen zufolge Einheitseigenspannungsquellen in den Stützstellen. Sie können durch Einsetzen von $\Delta m_j = 1$ bzw. $\Delta q_j = 1$ in die Gleichungen (2) bzw. (1) aus den Elastizitätsgleichungen als Zwängungsschnittgrößen in einfacher Weise ermittelt werden. Kennzeichnend für das Verfahren ist, daß diese Einflußgrößen nur einmal zu Beginn der Rechnung ermittelt werden müssen. Hierin kommt eben zum Ausdruck, daß die Steifigkeit des Tragwerkes während des Berechnungsganges nicht geändert wird.

Die inelastischen Stoffgesetze stellen einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Δm_{jk} und ΔM_{jk} bzw. zwischen Δq_{jk} und ΔQ_{jk} dar. Dabei wird elastoplastisches Deckblechverhalten angenommen, so daß eine finite Beziehung $\Delta m_{jk}(\Delta M_{jk})$ vorliegt und das entstehende nichtlineare Gleichungssystem (5) für ΔM_j iterativ gelöst werden muß. Das Kernkriechgesetz hingegen wird durch die zeitliche Differentialgleichung $\dot{q} = f(Q, q, t)$ dargestellt. Solche gewöhnliche Differentialgleichungen können numerisch derart integriert werden, daß die Δq_j nur mehr vom bereits bekannten Zustand zu Beginn des Zeitschrittes Δt_j abhängen. Das bedeutet, daß nicht das gesamte Gleichungssystem (5), sondern nur der Teil (5.a) iterativ gelöst werden muß, da die Δq_j von vornherein bekannt sind. Der Sandwichbalken demonstriert also anschaulich die beiden möglichen Berechnungsmethoden bei Vorliegen inelastischer Stoffgesetze.

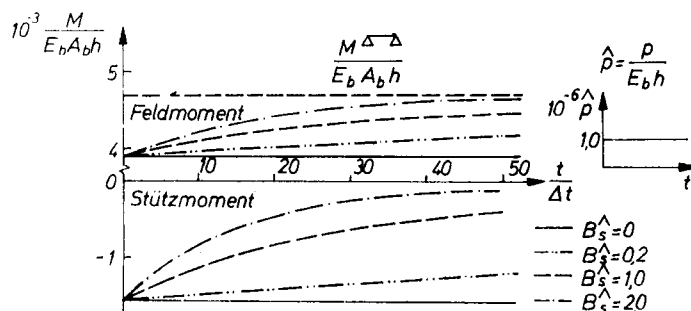


Bild 1b. Dimensionslose Stütz- und Feldmomente über dimensionsloser Zeit zufolge nichtlinearen Kernkriechens bei linear elastischem Deckblech unter konstanter Last \hat{p} , $n_s = 3$ — Für B_s^hat lies \hat{B}_s

Als Beispiel wird ein Zweifeldträger nach Bild 1a behandelt. Unter der Annahme linear elastischen Deckbleches und nichtlinearen Kernkriechgesetzes nach NORTON-BAILEY ($\dot{\gamma}^N = B_s \tau^{n_s}$; $\Delta q_j = B_s (Q_{j-1}/A_s)^{n_s} \Delta t_j$ mit $B_s = 1/\partial(\tau_n)^{n_s}$ (vgl. ZIEGLER [6], S. 178)) sind die zeitlichen Verläufe der dimensionslosen Stütz- bzw. maximalen Feldmomente für $p = p_0 H(t)$ in Bild 1b dargestellt. Eine Dimensionsanalyse zeigt, daß das Ergebnis neben elastischen und geometrischen Kenngrößen nur mehr von den dimensionslosen Materialparametern n_s und $\hat{B}_s = \Delta t (G_s)^{n_s} / \partial(\tau_n)^{n_s}$ abhängt. Als weiteres Beispiel wird der gleiche Träger, aber mit linear elastischem Kern und nichtlinearem Deckblech nach RAMBERG-OSGOOD ($\varepsilon^N = B_b \sigma^{n_b}$; $\Delta m_j = 2B_b [(M_{j-1} + \Delta M_j - M_F)^{n_b} - (M_{j-1} - M_F)^{n_b}] / A_b h^{n_b+1}$ im plastizierenden Bereich, M_F elastisches Grenzmoment) unter quasistatisch wechselnder Belastung be-

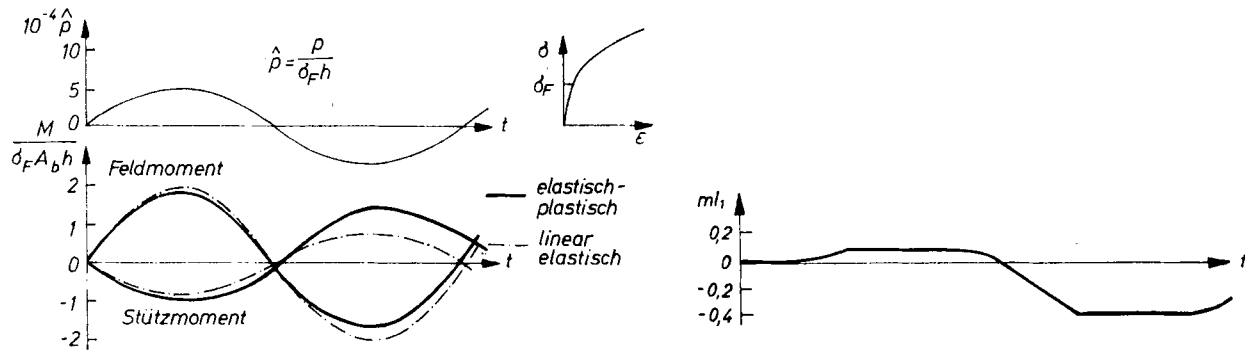


Bild 1c. Dimensionslose Stütz- und Feldmomente bei linear elastischem Kern und elastisch-plastischem Deckblech unter zeitlich veränderlicher Belastung \hat{p} ; $n_b = 3$; $B_b = 2,3 \cdot 10^{-3}$

Bild 1d. Zeitlicher Verlauf der ideellen Eigenspannungsquellen am Ort des Feldmomentes

trachtet (Bild 1c). Wieder zeigt sich, daß eine dimensionslose Lösung (s. Bilder 1c, d) möglich ist, welche noch von den Materialparametern n_b und $\hat{B}_b = B_b \sigma_F^{n_b}$ abhängt.

Ziel der Arbeit war die Entwicklung eines Berechnungsverfahrens für statisch unbestimmte inelastische Sandwichbalken unter Zuhilfenahme bekannter Lösungsmethoden für linear elastische Balken. Der vorgestellte inkrementelle Algorithmus verwendet Einflußzahlen, welche aus den Greenschen Funktionen des linear elastischen Balkens zufolge Einzellasten hergeleitet werden. Weil im Laufe der Rechnung die Balkensteifigkeit nicht geändert wird, können diese Einflußzahlen zu Beginn ein- für allemal ausgewertet werden, und die zur Lösungsberechnung nötige Iteration beschränkt sich ausschließlich auf das Stoffgesetz.

Literatur

- 1 IRSCHIK, H., Das Mohrsche Verfahren zur Berechnung von Biegebalken mit nichtlinearem Stoffgesetz, Technische Mechanik **6** (1985), 21–28.
- 2 ZIEGLER, F.; IRSCHIK, H., Dynamic analysis of elastic-plastic beams by means of thermoelastic solutions, Int. J. Solids Struct. **21** (1985).
- 3 REISSNER, H., Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen, ZAMM **11** (1931), 1–8.
- 4 ZIEGLER, F.; IRSCHIK, H., Thermal stress analysis based on Maysel's Formula, Erscheint in: HETNARSKI, R. B. (ed.), Thermal Stresses, North-Holland, Amsterdam.
- 5 FOTIU, P.; IRSCHIK, H.; ZIEGLER, F., Analysis of viscoplastic sandwich beams using influence functions, Erscheint demnächst.
- 6 ZIEGLER, F., Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper, Springer Wien, New York 1985.

Anschrift: Dipl. Ing. PETER FOTIU, Dipl. Ing. Dr. techn. HANS IRSCHIK, Institut für Allgemeine Mechanik, Technische Universität Wien, Karlsplatz 13, A-1040 Wien, Österreich

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **66** (1986) 4, T 137 – T 139

GAMER, U.

Fortschreitende Plastizierung mit Wechsel des Tresca-Regimes

Die Trescasche Fließbedingung wird gern angewandt, da sie in vielen Fällen zu geschlossenen Lösungen führt. Ihr Nachteil besteht in den Kanten der Fließfläche. Bei den folgenden Scheibenproblemen durchwandert der Spannungsbildpunkt eines Sonderbereichs der Scheibe mit zunehmender Plastizierung eine Ecke des Tresca-Polygons. Besonderes Augenmerk ist dabei auf die Stetigkeit der plastischen Dehnungen zu richten.

Abb. 1a zeigt die Verteilung von Radial- und Umfangsspannung in einem stillstehenden idealplastischen Querpreßverband. Für Radienverhältnisse $a/b < 1/e$ existiert ein kritisches Übermaß, das zum Verschwinden der Umfangsspannung am Innenrand der Nabe führt. Bei überkritischem Übermaß läßt sich die Spannungsverteilung für idealplastisches Verhalten nicht mit Hilfe der Trescaschen Fließbedingung berechnen. Ähnlich wie im Falle der rotierenden Vollscheibe schafft jedoch die Berücksichtigung einer Verfestigung Abhilfe [1]. Es zeigt sich, daß die Spannungsbildpunkte in einem an die Fuge angrenzenden Sonderbereich der Nabe während des Fügens von einem Regime des Tresca-Sechsecks in eine Ecke wandern [2].

Hier wird der Einfluß der Rotation auf die Spannungen im Querpreßverband mit unterkritischem Übermaß untersucht. Der plastische Bereich dehnt sich infolge der Rotation nur unwesentlich aus; die Spannungen werden aber angehoben, und bei einer von Radienverhältnis und Übermaß abhängigen kritischen Drehzahl wechselt die Radialspannung an der elastisch-plastischen Grenze ihr Vorzeichen (Abb. 1b). Bei weiterer Steigerung der Drehzahl

setzt sich der plastische Bereich aus drei Teilen zusammen, wie Abb. 1c zeigt: Im inneren Teil, $a \leq r \leq r_1$, gilt weiterhin $\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_0$ und $d\varepsilon_\varphi^p = -d\varepsilon_r^p$. In den anderen beiden Teilen ist $\sigma_\varphi = \sigma_0$ und $d\varepsilon_\varphi^p = -d\varepsilon_z^p$. Diese unterscheiden sich darin, daß im Sonderbereich, $r_1 \leq r \leq r_0$, eine plastische Vordeformation gemäß $d\varepsilon_\varphi^p = -d\varepsilon_r^p$ vorliegt, welche im äußeren plastischen Bereich, $r_0 \leq r \leq r_2$, fehlt. Am abnehmenden Grenzradius r_1 durchwandern die Spannungsbildpunkte eine Ecke des Tresca-Polygons (Abb. 2). Die plastischen Dehnungen sind schematisch auf Abb. 1d dargestellt. Im folgenden werden die Spannungen und die Verschiebung im Sonderbereich und im äußeren plastischen Bereich abgeleitet.

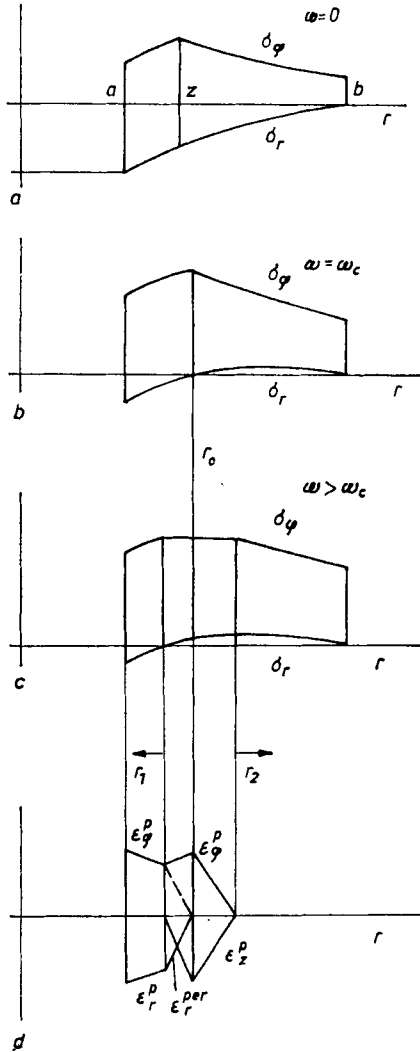


Abb. 1. a) Spannungen im stillstehenden Querpreßverband, b) Spannungen in der Nabe bei kritischer Winkelgeschwindigkeit, c) Spannungen in der Nabe bei überkritischer Winkelgeschwindigkeit, d) plastische Dehnungen in der Nabe bei überkritischer Winkelgeschwindigkeit

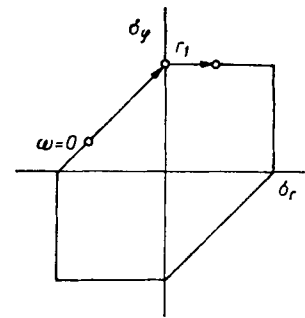


Abb. 2. Weg eines Bildpunktes des Sonderbereichs auf der Spannungsebene

Die Fließbedingung lautet

$$\sigma_\varphi = \sigma_0. \quad (1)$$

Damit liefert die Bewegungsgleichung

$$\sigma_r = \sigma_0 - \frac{1}{3} \rho \omega^2 r^2 + \frac{C_1}{r}. \quad (2)$$

Aus der Fließregel $d\varepsilon_r^p = 0$ folgt, daß im Sonderbereich, $r_1 \leq r \leq r_0$, der plastische Anteil der Radialdehnung $\varepsilon_r^p = \varepsilon_r^{\text{per}}(r)$ unabhängig vom Lastparameter ω^2 ist. Das Hookesche Gesetz ergibt

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu) \sigma_0 - \frac{1}{3} \rho \omega^2 r^2 + \frac{C_1}{r} \right] + \varepsilon_r^{\text{per}} \quad (3)$$

und nach Integration

$$u = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu) \sigma_0 r - \frac{1}{9} \rho \omega^2 r^3 + C_1 \log r \right] + \int_{r_0}^r \varepsilon_r^{\text{per}}(x) dx + C_4. \quad (4)$$

Im äußeren plastischen Bereich, $r_0 \leq r \leq r_2$, fehlt die bleibende plastische Dehnung ε_{per} . Die Zusammensetzung der Bereiche sowie numerische Ergebnisse findet man in [3]. Auf einen sehr ähnlichen Formalismus führt die Lösung des Wärmespannungsproblems der Scheibe mit ringförmiger Wärmequelle [4].

Charakteristisch für die fortschreitende Plastizierung mit Wechsel des Tresca-Regimes ist das in der Verschiebung auftretende Integral über die bleibende plastische Dehnung. Bei Werkstoffen mit Verfestigung erscheinen solche Integrale auch in den Spannungen.

Literatur

- 1 GAMER, U., Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk, Ing.-Arch. **54**, 345 (1984).
- 2 GAMER, U., Elastic-plastic shrink fit with super-critical interference, Acta Mech.
- 3 GAMER, U.; KOLLMANN, F. G., A theory of rotating elasto-plastic shrink fits, Ing.-Arch. **56** (1986).
- 4 GAMER, U.; MACK, W., Thermal stress in an elastic-plastic disk exposed to a circular heat source, ZAMP **36**, 568 (1985).

Anschrift: Professor Dr. UDO GAMER, Institut für Mechanik, Technische Universität Wien, Karlsplatz 13, A-1040 Wien, Österreich

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **66** (1986) 4, T 139 – T 140

GAMER, U.; PAO, Y.-H.

Propagation of Ultrasonic Waves in Plastically Predeformed Bodies

The controversial subject of the influence of plastic predeformation on the propagation of ultrasonic waves was investigated by G. C. JOHNSON [1] and by M. KOBAYASHI [2]. A new approach is offered in the following.

The equation of motion of a small disturbance superimposed on a static predeformation reads in initial frame of reference

$$t_{JK}^i \frac{\partial^2 u_I}{\partial X_J \partial X_K} + \frac{\partial s_{IJ}}{\partial X_J} = \rho^i \ddot{u}_I, \quad (1)$$

where t_{JK}^i means the Cauchy prestress, u_I is the displacement of the disturbance, s_{IJ} the stress associated with it and ρ^i the density in the predeformed state [3]. The derivation of this equation is based on the decomposition of total stress and displacement in static parts belonging to the predeformation and small dynamic parts representing the disturbance.

Presuming small predisplacement gradients $\partial u_I^i / \partial X_J$ one obtains for isotropic hyperelastic materials [4]

$$s_{IJ} = C_{IJKL} e_{KL} \quad (2)$$

with

$$C_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + \mu (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}) + [(-\lambda + \nu_1) \delta_{IJ} \delta_{KL} + (-\mu + \nu_2) (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK})] e_{NN}^i + 2(\lambda + \nu_2) (e_{IJ}^i \delta_{KL} + e_{KL}^i \delta_{IJ}) + 2(\mu + \nu_3) (e_{IK}^i \delta_{JL} + e_{IL}^i \delta_{JK} + e_{JK}^i \delta_{IL} + e_{JL}^i \delta_{IK}) \quad (3)$$

and

$$e_{KL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_K}{\partial X_L} + \frac{\partial u_L}{\partial X_K} \right). \quad (4)$$

The moduli $\lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ are the Lamé constants of second and third order, respectively.

A material that has undergone homogeneous plastic deformation followed by complete unloading exhibits elastic behavior. Thus, its stress-strain relation for a superimposed disturbance should again have the form of (2). But there, for elastic plastic predeformation, only the elastic parts of the prestrains enter and furthermore, due to plastic flow, the isotropic material has become orthotropic. Therefore, the modified constitutive relation reads

$$s_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} e_{KL} \quad (5)$$

with

$$\bar{C}_{IJKL} = \bar{c}_{IJKL} + [(-\lambda + \nu_1) \delta_{IJ} \delta_{KL} + (-\mu + \nu_2) (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK})] e_{NN}^e + 2(\lambda + \nu_2) (e_{IJ}^e \delta_{KL} + e_{KL}^e \delta_{IJ}) + 2(\mu + \nu_3) (e_{IK}^e \delta_{JL} + e_{IL}^e \delta_{JK} + e_{JK}^e \delta_{IL} + e_{JL}^e \delta_{IK}), \quad (6)$$

where e_{IJ}^e designates the elastic part of the prestrain. The empirical relation

$$\bar{c}_{IJKL} = \lambda [\delta_{IJ} \delta_{KL} + p_1 (e_{IJ}^p \delta_{KL} + e_{KL}^p \delta_{IJ})] + \mu [\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK} + p_2 (e_{IK}^p \delta_{JL} + e_{IL}^p \delta_{JK} + e_{JK}^p \delta_{IL} + e_{JL}^p \delta_{IK})], \quad (7)$$

where e_{IJ}^p means the plastic part of the prestrain and p_1 and p_2 are two constants, allows for the fact that, by plastic deformation, e.g. during rolling, the previously randomly oriented crystallites are aligned parallel to a preferred

direction and that, with increasing order, the originally isotropic gross behavior is changed into orthotropic behavior. The above relation substitutes a statistical theory describing the influence of plastic strain on the bulk moduli, which is still lacking. Since small plastic predeformation results in slight anisotropy, only the second order moduli not multiplied by a small quantity have to be modified.

Experiments show that, even under applied load, ultrasonic waves are propagated elastically and therefore, the validity of (5) is postulated for complete cycles of loading and unloading.

References

- 1 JOHNSON, G. C., Acoustoelastic Theory for Elastic-plastic Materials, J. Acoust. Soc. Am. **70**, 591 (1981).
- 2 KOBAYASHI, M., Acousto-plastic Effects Caused by Elasto-plastic Deformation of Solids (in Japanese), Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. (A) **48**, 1072 (1982).
- 3 GAMER, U.; PAO, Y.-H., Propagation of Disturbances in Predeformed Elastic-plastic Materials, ZAMM **63**, T 158 (1983).
- 4 TOKUOKA, T.; IWASHIMIZU, Y., Acoustoelasticity (in Japanese), Science of Machine **27**, 860 (1975).

Addresses: Professor Dr. UDO GAMER, Institut für Mechanik, Technische Universität Wien, Karlsplatz 13, A-1040 Wien, Österreich;
Prof. Dr. Y.-H. PAO, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, Ithaca, N. Y. 14853, USA

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 140 – T 141

GOLYGOWSKI, W.

Computerized Experimental Set for the Study of Acoustic Emission in Materials

The acoustic emission (AE) technique is a modern and increasingly frequent nondestructive method for the study of materials. Its systematic development has led to its wide range of application both in laboratory and field studies. Recently a new laboratory set for AE studies in soils for agrotechnical purposes has been built in the Technical University of Lublin. The construction of the set has been designed for the purpose of studying other materials, such as: metals, rocks, plastics, etc. Studies are carried out in a triaxial apparatus additionally equipped with an AE monitoring system. The triaxial apparatus is a special system differing from the classic solution by the use of the electrohydraulic servomechanism as a power drive, which enables dynamic loading of the sample within a per-set programme. These programmes are to imitate real actions of soil of cultivation tools or agricultural vehicles.

Programmes of loading samples

The scheme of the set design is presented in fig. 1. Soil sample 1 is placed in the measurement cell and exposed to triaxial pressure, depending on the kind of the study programme. The programme of loading the sample is encoded in the memory of the CAMAC controller 11, which, with the help of amplifier 4 and electrohydraulic transducer 3, controls 2 which brings about the loading of the sample. The programme is controlled by displacement gauge 5 and force measurement gauge 7. By closing the feedback loop using measurement force or displacement, the classical servomechanism of force or displacement is reached. Thus, it is possible to realize precisely the conceived programme of displacement or loading of a given sample. The electrohydraulic transducer 3, used in the power transmission is a high-class transducer of the DOWTY-MOOG which guarantees for the simulation of practically all real actions on soil.

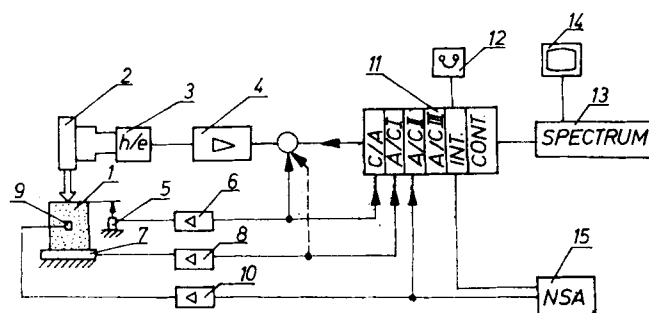


Fig. 1. A scheme of the set

Measurement systems

During the experiment three basic parameters are measured; force, displacement and AE, as well as other parameters, as temperature, cell pressure, etc. Tensometric gauge 7 and dynamic bridge 8 guarantee for the measurement of force with high accuracy of 0,1%. The displacement measurement system consists of the inductive gauge 5 and an amplifier of the firm CENSOR of the range ± 2 mm and accuracy of 0,5 μ m.

For the measurement of the AE signal the Polish DEMA-10 set has been employed. The set consists of piezo-electric pick-up 9, preamplifier, and amplifier 10 with a high-pass filter. The use of the DEMA-10 set permits the counting of AE impulses assessing the AE signal strength.

The collecting and analysing of results

The information from the measurement gauges 5, 7, 9 is transmitted to A/D transducers of the CAMAC system and then recorded on magnetic tape of the cassette memory 12. It is possible to record the whole information of the experiment or only a selected part considered to be important. The selection is performed in real time, following pre-set criteria, by the CAMAC cassette and the microcomputer SPECTRUM 13 coordinated with it. Results thus registered are, at a later time, analysed freely on the same microcomputer 13. It is also possible to observe the experiment in a different time scale on monitor 14. The stochastic analysis of AE and other signals is also performed in real time by use of the Hungarien stochastic analyser 15 type NSA-1000.

Address: Dr. W. GOŁYŃSKI, Technical University of Lublin, Lublin, Poland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 141 – T 143

HERRMANN, K. P.; GREBNER, H.

Energy Release Rates of Straight Interface Cracks in Self-Stressed Adhesive Joints

1. Introduction

The failure behavior of compound materials has many principal facets. One of them is the delamination effect where interface cracks separate two layers of a composite from each other. Today there exists an extensive literature about the interface crack problem [1–3]. In this paper, the fracture behavior of thermally loaded multiphase composite structures is studied containing interface cracks which are situated along the straight interfaces of these compounds. Figure 1 shows a typical cross section of a three-phase composite cylinder of infinite length containing an interface crack in one of both interfaces. Further, at time $t \geq t^*$ the cracked three-phase solid, having for $t < t^*$ the constant temperature T_0 of the unstressed initial state, is subjected to a constant temperature distribution $T = T_I = T_{II} = T_{III} \neq T_0$. The corresponding mixed boundary-value problem of the stationary plane thermoelasticity has been solved numerically under the assumption of plane strain conditions as well as of the tension-freedom of the external surface S and of the crack surfaces $S^+ \cup S^-$, respectively, using the finite element method.

2. Numerical stress analysis

2.1 Formulation of a mixed boundary-value problem

By introducing Airy's stress function F the following mixed boundary-value problem of the thermoelasticity has to be solved:

$$\nabla^4 F_j(x, y) + \frac{E_j \alpha_j}{1 - \nu_j} \nabla^2 T_j(x, y) = 0; \quad (j = \text{I, II, III}) \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$\sigma_{ij} n_j = 0; \quad (i, j = x, y). \quad (2)$$

Furthermore, at the uncracked parts of the material interfaces Γ_j ($j = 1, 2$) the continuity conditions

$$[\sigma_{xx}(x, y)]_{x=x_j} = [\sigma_{xy}(x, y)]_{x=x_j} = 0, \quad [u_x(x, y)]_{x=x_j} = [u_y(x, y)]_{x=x_j} = 0 \quad (3), (4)$$

have to be fulfilled.

The boundary-value problem (1)–(4) has been solved by means of the finite element method. Moreover, in case of the cracked three-phase solid, a combination of optical glasses ZK5 (segment I), BK7 (segment II) and a glass seal (gluing layer III) were used in the calculations. Besides, the geometrical data used in the calculations were chosen to $r_0 = 16,5$ mm, $d = 0,5$ mm, $\varphi_0 = 70^\circ$. Furthermore, the temperature distribution in the three-phase composite structure was given by $T_I = T_{II} = T_{III} = \Delta T = -560^\circ\text{C}$. Fig. 2 shows the calculated crack edge displacements for an interface crack (crack length $a = 3,6$ mm) starting at point A of the external boundary S and growing quasistatically along the interface into the interior of a three-phase composite structure (material combination ZK5/GS/BK7). It can be seen that an asymmetrical crack opening takes place. Moreover, due to the existing thermal stress field in the three-phase solid mixed mode loading of the crack surfaces occurs. Further, investigations given in [4] show remarkable differences between the values of the crack opening displacements for interface cracks lying in the interfaces of a three-phase or a two-phase solid, respectively.

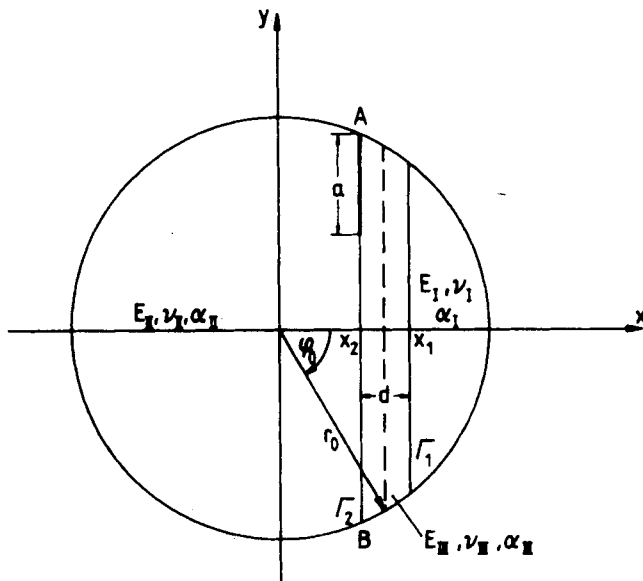


Fig. 1. Circular cross section of a cracked three-phase compound cylinder

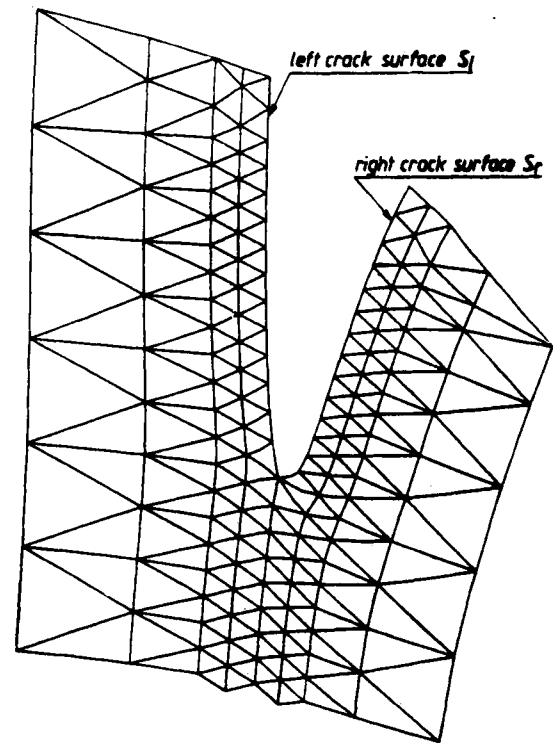


Fig. 2. Crack edge displacements for an interface crack in a three-phase solid; (magnification factor of the displacements: 2000)

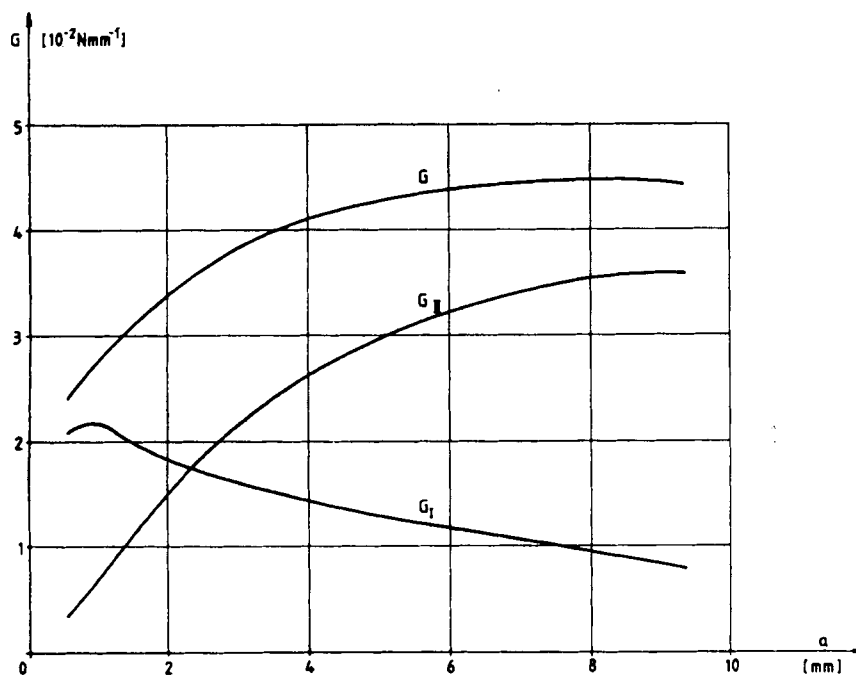


Fig. 3. Strain energy release rates as functions of crack length

2.2 Determination of strain energy release rates

The calculation of strain energy release rates at the tip of a quasistatic extending crack in the interface of a three-phase composite structure has been performed by using a modified crack closure integral [5].

Fig. 3 gives the result of finite element calculations showing the combined appearance of strain energy release rates G_I and G_{II} , respectively, which can be summarized to a total strain energy release rate $G = G_I + G_{II}$. Moreover, the influence of different material combinations on the values of strain energy release rates of interface cracks lying along the interfaces of two-phase composite structures has been studied. Finally, a comparison of these numerical calculations with the results of cooling experiments performed with brittle multiphase composite structures showed that curved thermal cracks only are realized in the experiments because the values of the specific fracture energy at the tips of the interface cracks do not reach the critical values of the strain energy release rate valid for the single components of the multiphase solids. Besides, in case of an interface crack the appropriate directional criterion for brittle crack growth would not be fulfilled [4].

References

- 1 ATKINSON, C., Appl. Mech. Reviews **32** (1979), 123–135.
- 2 DUNDURS, J.; COMNINOU, M., In: SIH, G. C.; TAMUZH, V. P. (eds.), Fracture of Composite Materials, Sijthoff & Noordhoff 1979, pp. 93–107.
- 3 PIVA, A.; VIOLA, E., Engng. Fracture Mech. **13** (1980), 143–174.
- 4 HERRMANN, K. P.; GREBNER, H., J. Theoret. and Appl. Fracture Mechanics **4** (1985), 127–135.
- 5 RYBICKI, E. F.; KANNINEN, M. F., Engng. Fracture Mech. **9** (1977), 931–938.

Addresses: Prof. Dr. K. P. HERRMANN, Laboratorium für Technische Mechanik, Universität Paderborn, Pohlweg 47–49, D-4790 Paderborn und Dr.-Ing. H. GREBNER, BBC Brown, Boverie & Cie, Mannheim, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **66** (1986) 4, T 143 – T 146

JONASCH, G.

Numerische Untersuchung einer Scheibenstruktur mit Cosserat-Eigenschaften

1. Einleitung

Regelmäßig strukturierte Scheiben lassen sich als linear elastisches Kontinuum betrachten. Vergleichende Rechnungen bei v. BROOCK [1] haben gezeigt, daß die in Abb. 1 gezeigte Scheibe hinsichtlich globaler Verschiebungen durch eine Kontinuumsrechnung nach der klassischen Theorie sehr schlecht beschrieben wird. Eine Kontinuumsrechnung nach der Cosserat-Theorie liefert hier richtige Ergebnisse.

Im folgenden wird gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen aus der Cosserat-Kontinuumsrechnung lokale Größen, d. h. Spannungen an einem materiellen Punkt der Scheibe, rückgerechnet werden können.

2. Die Scheibenstruktur

In Anlehnung an die von BESDO [2] vorgestellte ebene Struktur aus starren Klötzen und Blattfedern wird hier eine ähnliche untersucht, die vollständig aus elastischem Material besteht (Abb. 1). Unter Ausnutzung der regelmäßigen Strukturierung lassen sich charakteristische Elemente finden (Abb. 2). Als Stoffkonstanten des homogenen, linear elastischen Grundmaterials sind der Elastizitätsmodul zu 1,0 und die Querkontraktionszahl zu 0,3 gewählt. Die geometrischen Abmessungen sind als Vielfaches der Einheitslänge l_0 angegeben. Durch unterschiedliche senkrechte (B_s) und waagerechte (B_w) Stegbreiten lassen sich die Eigenschaften der Scheibe variieren. Diese Maße sind in Abb. 3 und Abb. 4 jeweils angegeben.

3. Referenz- und Kontinuumsrechnung

Um die Güte der Kontinuumsrechnung und der daraus ermittelten Spannungen beurteilen zu können, wird eine Referenzrechnung durchgeführt. Nachdem ein charakteristisches Element gemäß Abb. 2 durch finite Dreieckselemente abgebildet und die Freiheiten innerer Punkte eliminiert sind, erfolgt der Zusammenbau einer Scheibe mit 64 charakteristischen Elementen unter Nutzung von Substrukturtechnik. Lagerung und Belastung (Abb. 1) führen auf globale Verschiebungswerte einzelner Punkte der Scheibe. Anschließend werden durch Rückeinsetzalgorithmen Spannungen an materiellen Punkten der Scheibe bestimmt.

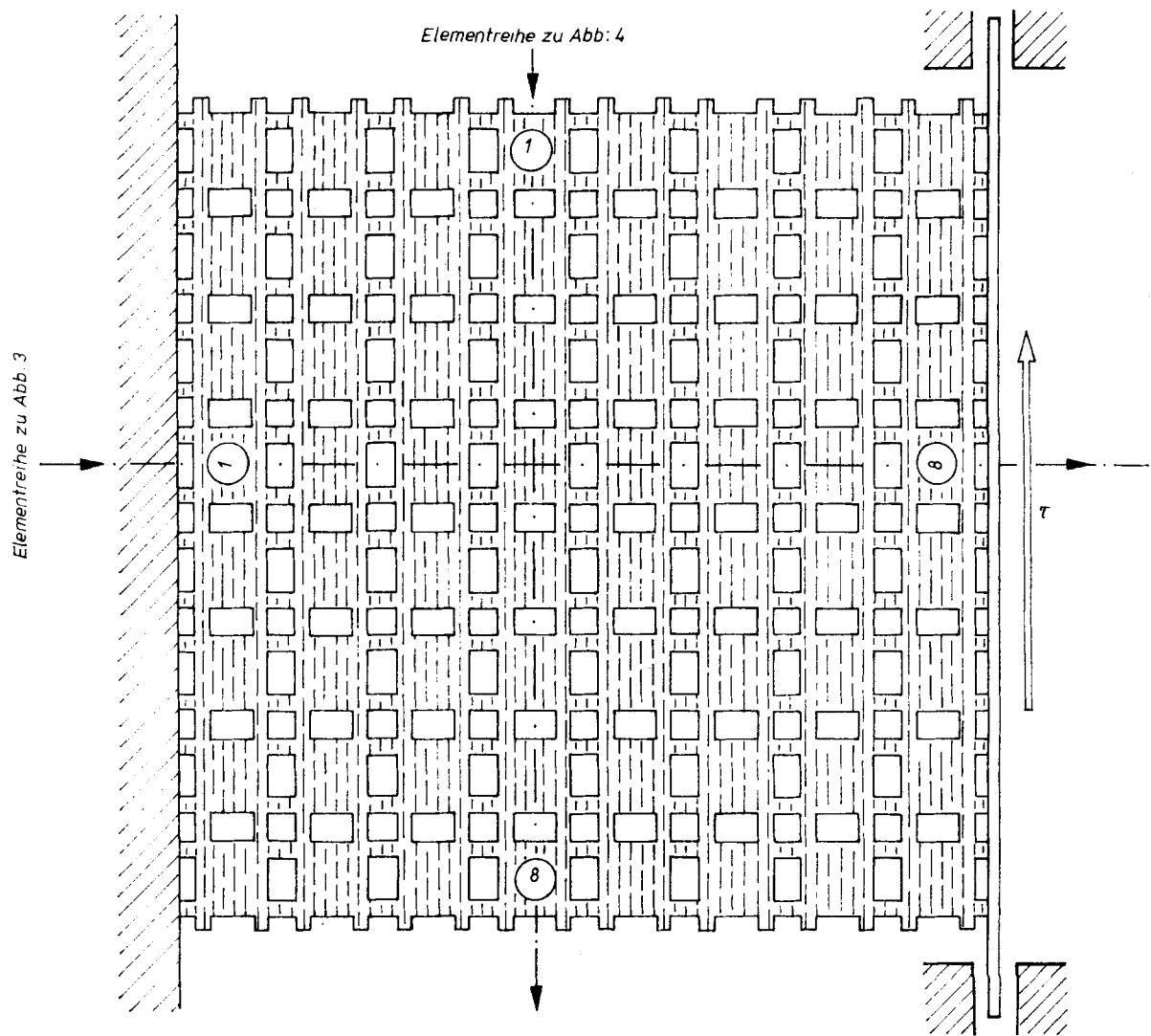


Abb. 1. Scheibenstruktur mit Cosserat-Eigenschaften

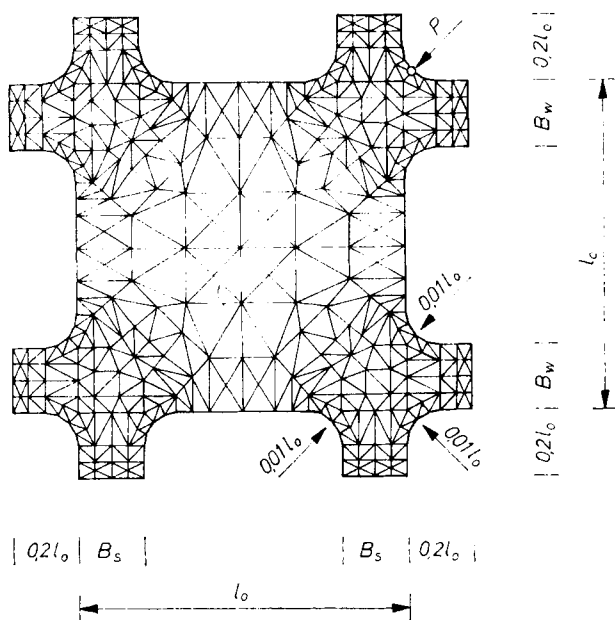
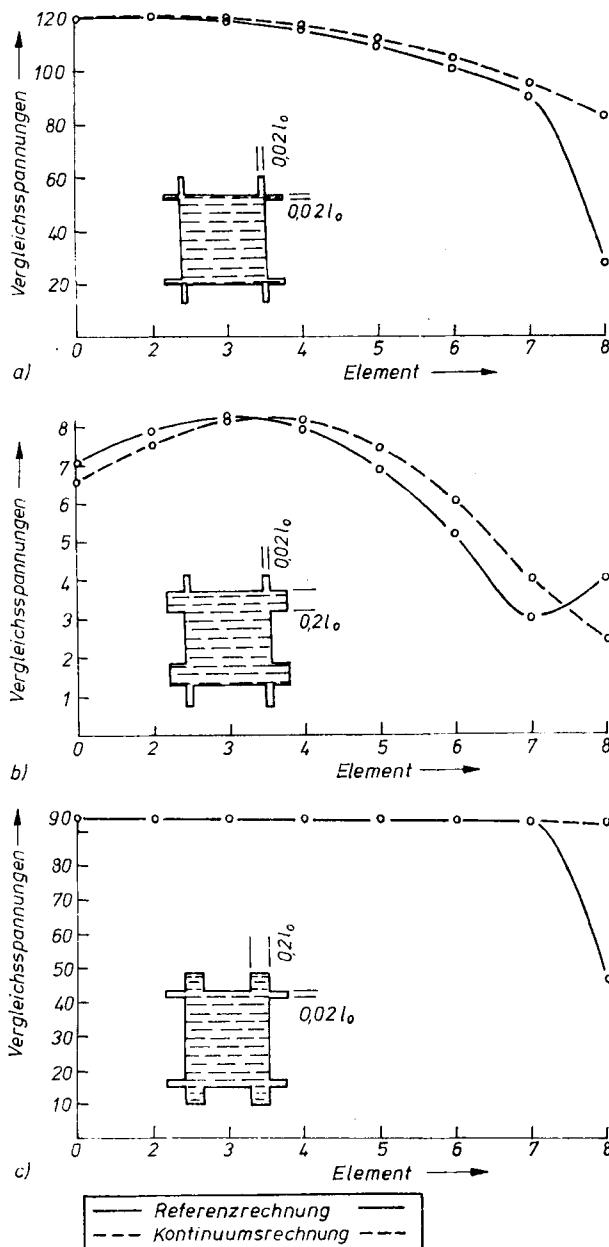
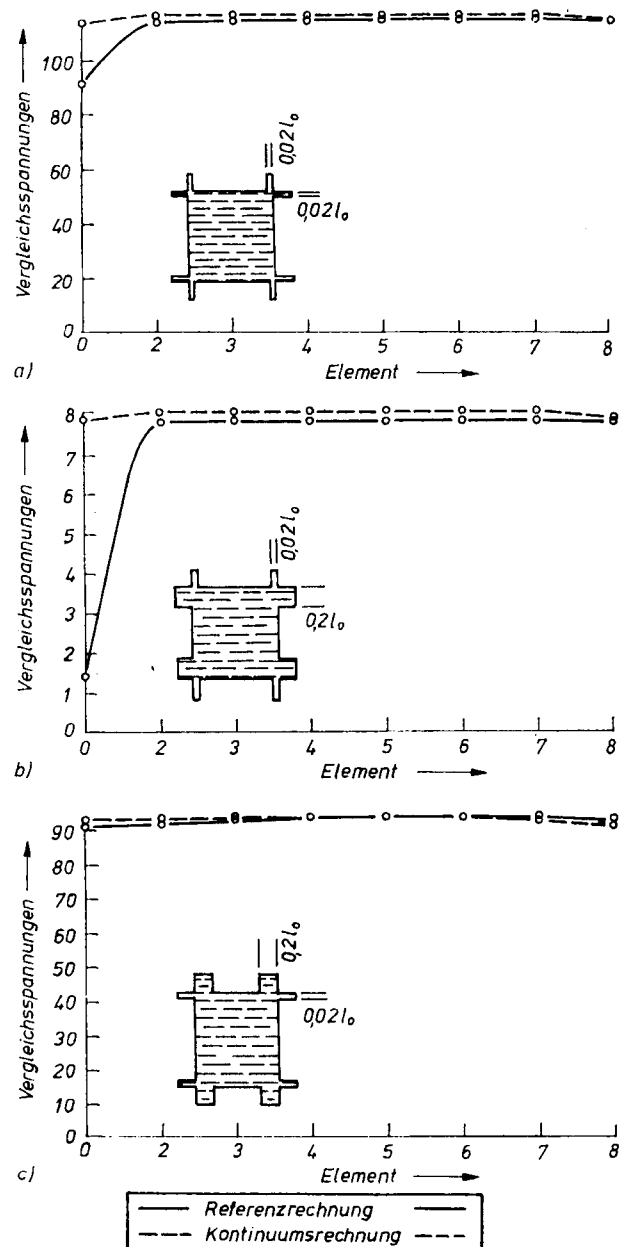


Abb. 2. Charakteristisches Element

Abb. 3. Vergleichsspannungen am Punkt P für eine waagerechte ElementreiheAbb. 4. Vergleichsspannungen am Punkt P für eine senkrechte Elementreihe

Zum Zweck einer Kontinuumsrechnung werden zunächst die Ersatzstoffkonstanten des durch Aussparungen geschwächten Grundmaterials bestimmt. Eine Möglichkeit der Ermittlung ist in der Kurzveröffentlichung des Herrn Dipl.-Ing. DORAU erläutert (siehe S. T 131 — T 133). Mit einem FE-Programm, in welches die Gesetzmäßigkeiten des Cosserat-Kontinuums eingearbeitet sind, werden Verschiebungsgrößen bestimmt. Lagerung und Belastung sind aus der Referenzrechnung übernommen. Anschließend lassen sich hieraus die Cosserat-Spannungen errechnen. Sie haben für das Grundmaterial der Scheibe unmittelbar keine Bedeutung und zeigen kontinuierliche Verläufe.

4. Rückrechnung von lokalen Größen aus der Kontinuumsrechnung

Aus den lokalen Größen, d. h. dem Verschiebungsfeld eines charakteristischen Elementes, den Dehnungen und den Spannungen, werden letztere (hier am Punkt P in Abb. 2) ausgewählt.

Während der Ermittlung der Ersatzstoffkonstanten werden die Spannungen σ_{xx}^P , σ_{yy}^P und σ_{xy}^P am zu untersuchenden Punkt P infolge eines am charakteristischen Element herrschenden Cosserat-Einheitsspannungsvektors σ^C in einer Matrix von Einflußfaktoren zusammengestellt. Zur Rückrechnung der Spannungen aus der Kontinuumsrechnung werden diejenigen Cosserat-Spannungen mit der Matrix der Einflußfaktoren multipliziert, die für die Koordinaten der Mitte eines charakteristischen Elementes innerhalb der Scheibe ermittelt wurden. Für den so gefundenen Spannungsvektor σ^P des Punktes P sind die Vergleichsspannungen nach der Hypothese von v. Mises, als Vielfaches des Elastizitätsmoduls des Grundmaterials, in Abb. 3 und Abb. 4 über den Elementnummern einer

senkrechten und einer waagerechten Reihe (s. Abb. 1) aufgetragen. Die Spannungswerte der Referenzrechnung sind durch eine durchgezogene, die der Cosserat-Kontinuumsrückrechnung durch eine gestrichelte Linie verbunden.

Die rückgerechneten Werte der Vergleichsspannungen zeigen gute Übereinstimmung mit den Referenzwerten besonders für die charakteristischen Elemente, die im Inneren der Scheibe liegen. Ein konstanter Gradient der Cosserat-Spannungen in der untersuchten Richtung macht sich durch einen senkrechten Versatz (konstante Abweichung) der beiden Linienzüge bemerkbar. Starke Änderungen des Gradienten können einen seitlichen Versatz (Nacheilen in Abb. 3b) hervorrufen. Diese Auswirkungen hängen auch von der Größe der Einflußfaktoren der Cosserat-Spannungen ab. Für charakteristische Elemente, die am Scheibenrand liegen, treten Abweichungen der rückgerechneten von den Referenzwerten auf, da sich die Cosserat-Spannungen hier aufgrund von Randbedingungen stark ändern.

Literatur

- 1 BROOCK, U., v., Zur Anwendung des elastischen Cosserat-Kontinuums bei regelmäßig strukturierten Scheiben. Fortschr.-Ber. VDI-Z. Reihe 1 Nr. 92, 1982.
- 2 BESDO, D., Zur Beschreibung des Verhaltens von ebenen Blockstrukturen als Cosserat-Kontinua. ZAMM 65 (1985) 4, T 124 bis T 125.

Anschrift: Dipl.-Ing. GUNTHER JONASCH, Institut für Mechanik, Universität Hannover, Appelstr. 11, D-3000 Hannover 1, BRD

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 146 – T 147

KAFKA, V.

Quantum Theory of Strength

The presented concept tries to synthesize the continuum mechanics (CM) approach and that of fracture mechanics (FM). The drawback of the CM approach is its inadequacy for the description of strength, the drawback of the FM approach its high claim on the input information.

Contrary to elasticity and to CM, where all the changes are continuous and smooth, the essential character of the fracturing process is discontinuous and quantified. The evidence of this fact can be seen e.g. in the stepwise popping-in of a crack and the striations forming, in the signals of acoustic emission and finally in the meaning for fracture not of the density of elastic energy in one point, but of a quantum of elastic energy in a volume, as is well understood in the FM approach.

Our quantum theory of strength concept is based upon the stress field calculated according to the CM approach, but two hypotheses are added, which are inspired by the FM points of view:

- a) The influence of the surface layer must be taken into account.
- b) The meaning of the quantum of elastic energy in a certain neighbourhood of the fracturing locus is decisive.

In the concept of mathematical elasticity the term "surface layer" does not appear. A body is modelled as an open set of points, i.e. without the surface points. The reasons for it are of a mathematical character, but it reflects the reality that the effect of the surface layer upon the macroscopic stress field is negligible. The situation is different from the point of view of strength, where the influence of the surface layer is very important. However, it is very difficult to describe the surface layer and the processes that proceed in it. It is substantially easier to model the surface layer by a surface plane, which means that the body is to be understood as two sets: the open set of the inner points and the set of the surface points. For the calculation of the fields of stress and strain only the inner set plays a role, but from the point of view of strength both sets are taken into account, their properties being considered as different. If no pieces of information are available from defectoscopy, the characteristics of strength are considered as homogeneous in either of the two sets.

Rigorously, the creation of a macrocrack is influenced by the distribution of elastic energy in the whole body and by the properties of the loading system. Our model simplifies this complicated reality by assuming that the decisive factor is the elastic energy comprised in a specific spherical neighbourhood of the fracturing locus. Of course that this assumption has meaning only for the creation of a macrocrack. For a longer progress of the crack throughout the body new stress fields and new quanta of energy would have to be calculated.

On the basis of the above advanced hypotheses the following criterion is then formulated: "A macroscopic crack will be created at a point if there is concentrated a specific quantum Q of elastic energy in its spherical neighbourhood that is characterized by a specific radius ϱ (ϱ -neighbourhood)".

A macroscopic crack is to be understood as a crack that is one order larger than the characteristic length of the microstructure. Hence the quantity ϱ that is specified as a material constant must depend on the microstructure.

The other parameter of the criterion is the quantum Q . In contradistinction to ϱ the quantity Q can acquire different values: it has one value for the inner points and another — lower — value for the surface points; it has one value for the creation (or for the onset of the progress) of a crack and another — lower — value for the continua-

tion of the crack. Furthermore, Q will change with the state of the material (plastic deformation, temperature, corrosion of the surface layer). In a multiaxial stress-state Q is limited by two scalar quantities: by the supremum of its deviatoric part and by another supremum of its isotropic part if the isotropic part of the stress tensor is tension.

The necessary input information (ϱ and Q) is relatively easy to acquire from simple experiments.

The best way to clarify the meaning of the concept is to present several pieces of experimental evidence the explanation and quantitative description of which are enabled:

1. The difference between the strength in pure tension and in tension at pure bending. — It is clear enough that the elastic energy concentrated in the ϱ -neighbourhood of a surface point is higher in the case of pure tension. It can be shown (cf. [1]) that the stress at the surface in the case of bending can (in brittle materials) — according to our concept — reach a value that can be up to one half higher than the value in the case of pure tension. This agrees with experimental evidence. From the measurements of strength in the two cases it is possible to determine the parameters ϱ and Q . With plastic deformation this effect is lowered, as at bending the stress field is homogenized at the surface.
2. The creation of cracks in the matrix of a composite at the contact with large inclusions. — The maximum stress at the contact with one inclusion in an unlimited medium does not depend on the dimensions of the inclusion; however, the quantum of energy in the ϱ -neighbourhood of a contact point will be higher at a larger inclusion, as the dropping of stress with the distance from the contact will be slower. This explains also the lower strength of composites with coarser particles.
3. The higher relative strength of very thin bodies. — If at least one of the dimensions of the body is smaller than ϱ , then the energy comprised in any ϱ -neighbourhood is smaller, as a part of the ϱ -neighbourhood contains free space without energy. Consequently the relative strength, measured by stress, is higher.
4. The discontinuous stepwise progress of a crack. — If the energy comprised in the ϱ -neighbourhood of the tip of a crack reaches its critical value in an elastic state, then the crack starts propagating with increasing velocity, as the Q_c that is necessary for the continuation is lower than the Q_c for the onset (brittle fracture). If the energy in the ϱ -neighbourhood reaches its critical value in a plastic state, then it drops with the progress of the crack towards the unplasticized zone and after some distance the motion stops. After some time-interval a new plastification and homogenization of the stress field raises the energy in the ϱ -neighbourhood and a new step begins.
5. Slowing-down of the progress of a crack at the surface of a body. — The ϱ -neighbourhood of the points at the tip of a crack that are near to the surface of the body comprises partly free space outside the body and therefore the energy comprised is low. In the case that the progress of the crack is parallel with the surface, this leads to the arching of the crack front; in the case that the crack approaches the surface in a perpendicular direction, this leads to the slowing down of the progress near the surface.

Reference

- 1 KAFKA, V., Quantum theory of strength. Part I: Fundamentals, Acta technica ČSAV (1985) No. 2.

Address: Ing. VRATISLAV KAFKA DrSc, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Czechoslovak Academy of Sciences, Vršeh radská 49, 12849 Praha 2, Czechoslovakia

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 147 – T 149

KALAJDŽISALIHOVIĆ, D.

Pierced Shear Walls in Plastic Range

1. Introduction

A structural system consisting of pierced shear walls is frequently used in tall buildings to resist lateral loads. Figure 1 shows a prototype of a pierced shear wall with its equivalent frame model subject to four cases of lateral loadings. The wall is divided into n stories and may have m rows of openings. An equivalent frame model coincides with the centroidal axis of columns and beams. The term frame is used to denote a structure which resists deformation entirely by bending action within its members. Beams have infinite flexural rigidity on the parts a_i and c_j . The mechanical behaviour of material is idealised by the model of rigid perfectly plastic material. For simplicity of exposition it is assumed that wall thickness, height of story and mechanical properties of material do not vary within the wall. The aim of this paper is to derive simple expressions for design and analysis of such walls according to the theory of plasticity.

2. Formulation and solution of the problem

The problem is defined as one of finding the critical load which will transform the structure into a mechanism. The solution of the problem is proposed by the kinematic method. A possible collapse mechanism is shown in fig. 2. It has one degree of freedom and a number $m(n-1)$ of redundancies. For the reason of clarity in fig. 2, the full plastic moment M_{pp} of beams is inserted in plastic hinges of only one beam.

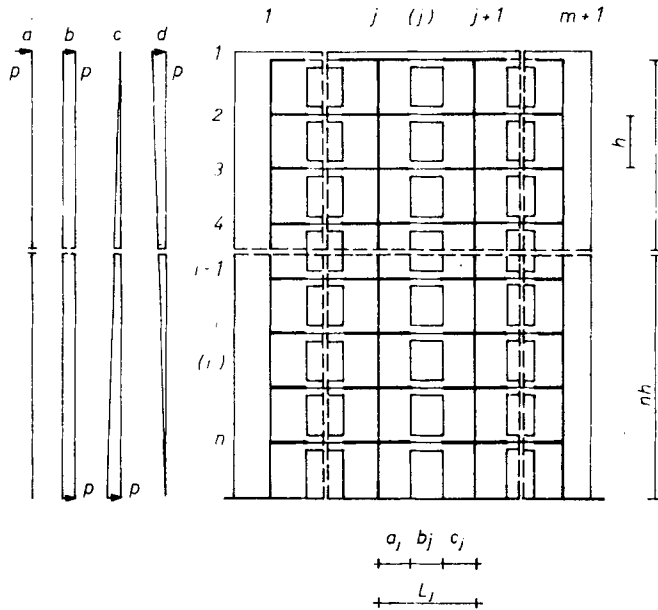


Fig. 1

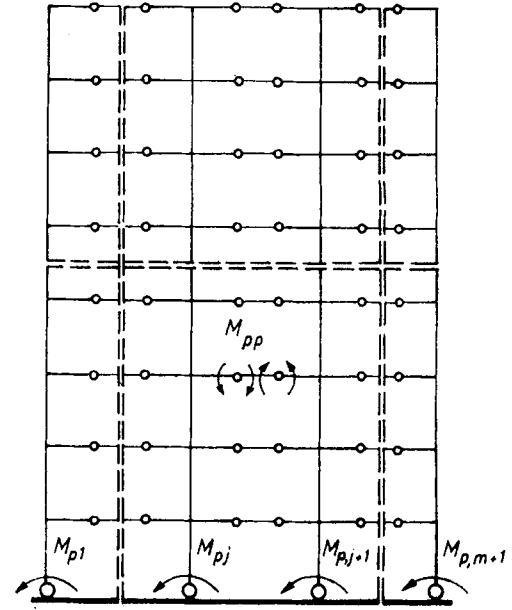


Fig. 2

Applying the principle of virtual work we obtain the relation

$$Cn^2h^2p_k = A + 2nB \quad (2.1)$$

in which $C = (nh)^{-1}$, $1/2$, $1/6$, $1/3$ for loading cases a, b, c, d respectively, h denotes the height of story, p_k the critical load and

$$A = \sum_{j=1}^{m+1} M_{pj}, \quad B = M_{pp} \sum_{j=1}^m L_j/b_j$$

where M_{pj} denotes the full plastic moment of the j -th column, M_{pp} the full plastic moment of beams, L_j is the beam span in the (j) -th bay, b_j is the width of opening in the (j) -th bay.

The mechanism in fig. 2 will be the actual collapse mechanism if bending moments in columns nowhere violate the yield condition

$$\begin{aligned} -M_{pj} &\leq M_{ij}^q \leq M_{pj}, & i > l, & & j = 1, \dots, m+1, \\ -M_{pj} &\leq M_{ij}^d \leq M_{pj}, & i = l, \dots, n, & & j = 1, \dots, m+1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

in which M_{ij}^q and M_{ij}^d denote bending moments in the j -th column in the sections slightly above and below the i -th beam, respectively. Distributed loading on the column $j = 1$ is replaced by the concentrated forces in the joints "il". Bending moments in columns are taken positive if they produce compression on the right side of column. They can be expressed in terms of the $m(n-1)$ independent variables. Let these be all axial forces in the beams above the beam $i = n$. The axial force carried by the i -th beam in the (j) -th bay will be denoted by N_{ij} , taken positive in compression.

Equilibrium conditions give the following expressions for M_{ij}^q and M_{ij}^d

$$\begin{aligned} M_{ij}^q &= -2(i-1)B_j + \sum_{k=1}^{i-1} N_{k,j-1}(i-k)h - \sum_{k=1}^{i-1} N_{kj}(i-k)h + \delta_{jl}M_{i1}^0, \\ M_{ij}^d &= -2iB_j + \sum_{k=1}^{i-1} N_{k,j-1}(i-k)h - \sum_{k=1}^{i-1} N_{kj}(i-k)h + \delta_{jl}M_{i1}^0 \end{aligned}$$

in which

$$\begin{aligned} B_j &= M_{pp}(1 + c_{j-1}b_{j-1}^{-1} + a_jb_j^{-1}), & j = 2, \dots, m, \\ B_1 &= M_{pp}(0.5 + a_1b_1^{-1}), & B_{m+1} = M_{pp}(0.5 + c_mb_m^{-1}), \\ \delta_{jl} &= 0 \text{ for } j \neq l, & \delta_{jl} = 1 \text{ for } j = l, \end{aligned}$$

and M_{i1}^0 is the bending moment in the first column caused by lateral concentrated forces in the joints "il". The linear system (2.2) can be reduced to the form:

$$M_{ij}^q \leq M_{pj}, \quad -M_{pj} \leq M_{ij}^d. \quad (2.3)$$

It has $(m + 1)(2n - 1)$ weak inequalities and $m(n - 1)$ unknowns N_{ij} ($i \neq n$). A solution of the system can be found by Dines's method of elimination of the variables and can exist only if

$$-A + 2iB \leq M_{i1}^0 \leq A + 2(i - 1)B, \quad M_{pj} \geq 2B_j. \quad (2.4)$$

Inequalities (2.4) impose restrictions in the application of the derived expression (2.1) for load carrying capacity of a pierced shear wall. For the loading case "b"

$$M_{i1}^0 = 0.5(i - 1)^2 h^2 p_{k,b} = n^{-2}(i - 1)^2 (A + 2nB),$$

and conditions (2.4) can be reduced to only one inequality

$$A/B \geq (2n^2 + 2n + 1)^{1/2} - n + 1.$$

The dimensions of the pierced shear walls found by formulae (2.1) must be checked by the criteria of stability, ductility and deformation [1].

Reference

1 SIMOVIĆ, V., Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije. (Walls with openings and framed structures). Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

Address: Doc. dr. DŽEMALUDIN KALAJDŽISALIHOVIĆ, Institute of Civil Engineering, University of Osijek, Drinska 16a-18, 54000 Osijek, Jugoslavija

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 4, T 149 - T 150

KAVEH, A.

On Statical Bases for a Flexibility Analysis of Planar Trusses

1. Introduction

The stress resultant distribution due to a given loading on a structure by a flexibility analysis is given as

$$r = B_0 p + B_1 q$$

where $B_0 p$ is any particular solution satisfying equilibrium with the imposed load and $B_1 q$ is a complementary solution formed from a maximum set of independent self-equilibrating stress distributions (S.E.Ss), known as a *statical basis*.

The compatibility equations together with the above relation yield:

$$r = [B_0 - B_1(B_1^T F_m B_1)^{-1} B_1^T F_m B_0] p$$

where $G = B_1^T F_m B_1$ is known as the *flexibility matrix* of the structure.

For an efficient flexibility method G should be sparse, banded and well-conditioned. In this paper only the former property is considered. Allied to a statical basis, there is another set associated with the graph model of S , known as a generalized cycle basis of S . Methods for selecting such bases are given by KAVEH [1].

In this paper two special methods are presented for generating generalized cycle bases, corresponding to localized statical bases leading to sparse flexibility matrices for planar trusses. The first method employs the associate graph and the second uses a bipartite graph of the structure.

2. The mathematical model

The mathematical model of a truss is considered to be a finite graph S . The truss is supported in a statically determined fashion and supposed to have no critical forms. The dimension of a statical basis of a planar truss is given by

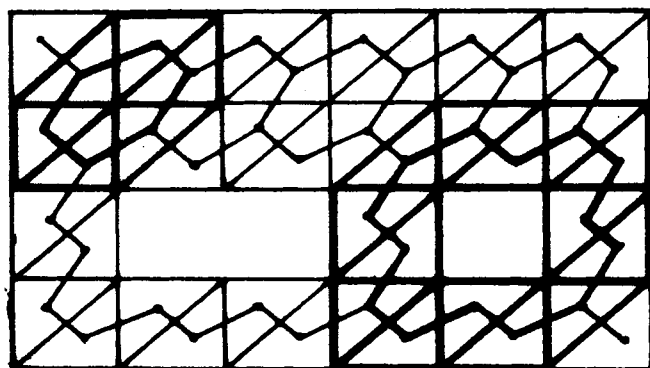
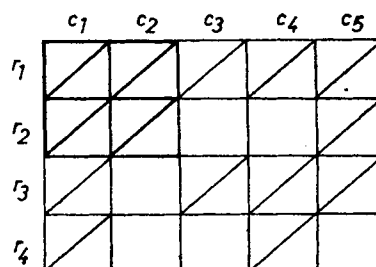
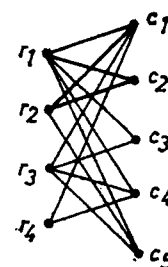
$$v(S) = M - 2N + 3$$

where M and N are the numbers of members (edges) and nodes (vertices) of S , respectively. The first Betti number of a graph G is defined as

$$b_1(G) = M - N + 1.$$

3a. Method 1

Let S be a planar truss with triangular panels. The *associate graph* $A(S)$ of S is a graph whose vertices are in a 1-1 correspondence with triangular panels of S and two vertices are connected with an edge if the corresponding panels have a common member (cf. Fig. 1).

Fig. 1. S and $A(S)$ Fig. 2a. S and a v -cycleFig. 2b. $B(S)$ and a cycle

Theorem 1: For a fully triangulated S (except the exterior boundary), the dimension of a statical basis is the same as the first Betti number of its associate graph, $\nu(S) = b_1[A(S)]$.

For trusses with cut-outs $A(S)$ contains two types of cycles C_I and C_{III} . The substructure of S corresponding to a C_I type is one v -cycle, and the one corresponding to a C_{III} type is the union of three v -cycles. A v -cycle is a stable substructure whose degree of statical indeterminacy is equal to unity, and one S.E.S. can be formed on this substructure.

The algorithm of method 1.

Step 1: Construct the associate graph $A(S)$ of S .

Step 2: Select a minimal cycle basis of $A(S)$ using the algorithm of the author [2].

Step 3: Select the v -cycles of S corresponding to the cycles of $A(S)$.

Step 4: Form one S.E.S. on each selected v -cycle to obtain a localized element of a good statical basis of S .

Example: Consider a truss as shown in fig. 1, for which $\nu(S) = 11$. A cycle basis of $A(S)$ consists of five cycles of length 6 of type C_I and two cycles of lengths 14 and 18 of type C_{III} . Thus $1 \times 5 + 2 \times 3 = 11$ v -cycles are obtained. Two typical cycles of type C_I and C_{III} and the corresponding substructures in S are shown in fig. 1 in bold lines.

3b. Method 2

Let S be a planar truss consisting of rectangular panels with or without diagonal members (cf. Fig. 2a). The bipartite graph $B(S)$ of S is a graph constructed as follows: Associate one node with each row of the panels r_1, r_2, \dots, r_m . Similarly associate c_1, c_2, \dots, c_n with each column of panels. Connect r_i to c_j if the corresponding panel has a diagonal member (cf. Fig. 2b).

Theorem 2: For a truss defined above there holds $\nu(S) = b_1[B(S)]$.

The algorithm of method 2.

Step 1: Construct the bipartite graph $B(S)$ of S .

Step 2: Select a good cycle basis of $B(S)$. In this selection cycles $\{r_i, r_j, c_k, c_l\}$ with minimum $|i - j| + |k - l|$ should be chosen.

Step 3: Find the substructures of S corresponding to the cycles of the selected basis at step 2.

Step 4: Construct one S.E.S. on each selected v -cycle to form a good statical basis for S .

Example: Consider a truss as shown in Fig. 2a, for which $\nu(S) = 6$. The cycle basis of $B(S)$ consists of 6 cycles of length 4. The corresponding v -cycles are then obtained. A typical example of this is shown in Figs. 2 a, b.

4. Discussion

The first method is more suitable for triangulated trusses with or without cut-outs. This method can be modified to include other non-regular patterns. The second approach can efficiently be used for trusses with rectangular panels with or without diagonal members. The application of both methods can be extended to space trusses and finite element analysis of continua. A complete description and the mathematical justification of the presented methods are given by the author [3].

References

- 1 KAVEH, A., Optimal generalized cycle bases, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **20** (1979), 39–51.
- 2 KAVEH, A., Improved cycle bases for the flexibility analysis of structures, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* **9** (1976), 267–272.
- 3 KAVEH, A., Statical bases for an efficient flexibility analysis of planar trusses, *J. Struct. Mech.* **14** (1986) 4.

Address: Professor Dr. A. KAVEH, Technische Universität Wien, Institut für Allgemeine Mechanik, Karlsplatz 13/201, A1040 Wien, Österreich